幾何学 I 講義ノート

ホモロジー，ホモトピー，被覆空間などは，位相幾何学での基本概念であると同時に，幾何学，代数学，解析学の多くの分野で利用されている．この講義ではこれらの概念についての基本的知識を得ることを目標とし，定義，例，性質などを解説する．厳密な扱いはできない部分も多々あるが，一定のイメージを持てるような説明を心がける．

目次

1 ホモトピー群と被覆空間

1.1 準備

二つの位相空間 X と Y について

$$C(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ は連続 } \}$$

と定める．$A \subset X$ と $B \subset Y$ について

$$C((X,A),(Y,B)) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ は連続}, f(A) \subset B\}$$

と定める．この集合の要素（写像）を

$$f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$$

と表す．(X, A) を**位相空間対**と呼ぶ．$X = (X, \emptyset)$ とみなし，X 自身も位相空間対の一つと考える．$f(\emptyset) \subset B$ は自明なので $C((X, \emptyset), (Y, B)) = C(X, Y)$ である．$A = \{a\}$ （一点のみからなる集合）のときは (X, a) と略記する．

$f, g \in C((X, A), (Y, B))$ が**ホモトピック**(homotopic) であるとは連続写像

$$F : [0, 1] \times X \longrightarrow Y$$

で，$f_t(x) = F(t, x)$ とおくとき次が成り立つものが存在することを言う．

$$f_0 = f, \quad f_1 = g, \quad f_t \in C((X, A), (Y, B))$$

この写像 F を f から g への**ホモトピー**(homotopy) という．ホモトピーとは $C((X, A), (Y, B))$ における f から g への連続曲線と思って良い[*1]．ホモトピックであることを

$$f \simeq g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

と表す．

命題 1.1. ホモトピックは集合 $C((X, A), (Y, B))$ の同値関係である．

証明. 反射律 $f \simeq f$ は $F(t, x) = f(x)$ とおけばよい．対称律 $f \simeq g \Longrightarrow g \simeq f$ は f から g へのホモトピー F に対して $G(t, x) = F(1 - t, x)$ とおけばよい．推移律 $f \simeq g,\ g \simeq h \Longrightarrow f \simeq h$ は，f から g へのホモトピー F と g から h へのホモトピー G に対して $t \leq 1/2$ のときは $H(t, x) = F(2t, x)$，$t \geq 1/2$ のときは $H(t, x) = G(2t - 1, x)$ とおけばよい． ■

定義 1.2. 二つの位相空間対 (X, A) と (Y, B) が**同相**(homeomoriphic) であるとは，連続写像 $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ で全単射でありかつ $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ も連続で $f^{-1}(B) \subset A$ をみたすもの，すなわち連続写像 $f^{-1} : (Y, B) \longrightarrow (X, A)$ が存在することを言う．$(X, A) \cong (Y, B)$ と表す．

二つの位相空間対 (X, A) と (Y, B) が**ホモトピー同値**(homotopy equivalent) であるとは，$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ と $g : (Y, B) \longrightarrow (X, A)$ で次を満たすものが存在することを言う．ただし，I_X は X の恒等写像である．

$$g \circ f \simeq I_X : (X, A) \longrightarrow (X, A), \qquad f \circ g \simeq I_Y : (Y, B) \longrightarrow (Y, B)$$

$(X, A) \simeq (Y, B)$ と表す．

問題 1.1. 二つの位相空間対が同相であることは同値関係であることを示せ．またホモトピー同値も同値関係であることを示せ．

位相幾何学では同相な位相空間は同じものとみなされる．またこの講義で紹介する概念の多くはホモトピー同値な位相空間に対しては共通になる．なお，この講義では位相空間はコンパクト[*2]なもののみ扱う．また位相空間対は 1 点との対 (X, x_0) のみ扱う．このとき x_0 を**基点**(base point) と呼ぶ．

この講義で扱う基本的な位相空間の例を紹介する．

例 1.1. n 次元**球体**(n-disk) $D^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots {x_n}^2 \leqq 1\}$ および $n-1$ 次元**球面**($n-1$-sphere) $S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots {x_n}^2 = 1\}$

なお球体 D^n の境界 ∂D^n は球面 S^{n-1} である．$D^1 = [-1, 1]$ であるが，これは $I = [0, 1]$ と同相である．0 次元球体は 1 点，0 次元球面は 2 点とみなす．

例 1.2. n 次元**トーラス**(torus) $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$

[*1] 厳密には $C((X, A), (Y, B))$ に位相を入れなくてはならない．標準的な方法としてコンパクト開位相があるがここでは省略する．

[*2] 任意の開被覆が有限部分被覆を持つことをいう．ユークリッド空間内では有界閉集合であることと同値であり，この講義では有界閉集合と思って差し支えない．

例 1.3. **種数**(genus) g の閉曲面（g 人乗り浮き袋），Σ_g で表す．なお $\Sigma_1 = T^2$ である．

例 1.4. **メービウスの帯**(Möbiusu stripe)，**クラインの壷**(Klein bottle)
これらは表裏を決められない曲面[*3]である．ただしクラインの壷は $\mathbb{R}^3$ の中では自己交差のある形でしか実現できない．

位相空間 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとき，商集合 $X/\sim$ に自然な写像 $p : X \longrightarrow X/\sim$ による**等化位相**（identification topology, 逆像が開集合になる集合を開集合と定めた位相）を与えることができる．この位相空間を**商空間**(quotient space) と呼ぶ．商空間は位相幾何学における様々な基本的な例を生み出す．

例 1.5. **実射影空間**(projective space)，**複素射影空間**
$\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ に $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \exists c \neq 0,\ \boldsymbol{x} = c\boldsymbol{y}$ による同値関係を入れる．その商空間を $P^n(\mathbb{R})$ と表し n 次元実射影空間と呼ぶ．$\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ に置き換えたとき $P^n(\mathbb{C})$ と表し，複素射影空間と呼ぶ．

例 1.6. **レンズ空間**(lens space)
3 次元球面を $S^3 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$ とみなす．互いに素な自然数の組 $(p, q),\ q < p$ について

$$g : S^3 \longrightarrow S^3, \qquad g(z_1, z_2) = (z_1 e^{2\pi i/p}, z_2 e^{2\pi q i/p})$$

で定めれば g^p は恒等写像である．$x \sim g^k(x),\ (k = 0, 1, 2, \dots, p-1)$ として同値関係を定めるときその商空間 $L(p; q)$ をレンズ空間と呼ぶ．

問題 1.2. 上の g について $g^k,\ (k = 1, 2, \dots, p-1)$ は固定点 （$g^k(x) = x$ を満たす点 x）を持たないことを示せ．またレンズ空間の定義における同値関係の同値類はちょうど p 個の元からなることを示せ．

1 点とホモトピー同値な位相空間を**可縮**（contractible）という．X が可縮であるとき恒等写像 $I_X : X \longrightarrow X$ は X の一点への定値写像 $C_{x_0} : X \longrightarrow X,\ C_{x_0}(x) = x_0$ とホモトピックである．D^n は可縮である．

問題 1.3. D^n は可縮であることを示せ．メービウスの帯は S^1 とホモトピー同値であることを示せ．

1.2　ホモトピー群

$C((X, A), (Y, B))$ のホモトピックによる商集合を**ホモトピー集合**と呼び

$$\pi((X, A), (Y, B))$$

と表す．この同値類を**ホモトピー類**とよぶ．
さて $C : (I, \partial I) \longrightarrow (X, x_0)$ は始点と終点がともに x_0 の連続曲線（閉曲線）である．このことから $\pi((I, \partial I), (X, x_0))$ には次によって群構造を定めることができる．
まず $C,\ D \in C((I, \partial I), (X, x_0))$ について $C \cup D : (I, \partial I) \longrightarrow (X, x_0)$ を

$$C \cup D(t) = \begin{cases} C(2t) & 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2} \\ D(2t-1) & \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

で定義する．$C(1) = D(0) = x_0$ より $C \cup D$ は連続である．

$$[C] * [D] = [C \cup D]$$

とおく．

[*3] 向き付け不可能という．第 4 章で紹介する．

定理 1.3. $\pi((I,\partial I),(X,x_0))$ は $*$ により群となる．この群を **基本群**(fundamental group) あるいは 1 次元ホモトピー群とよび $\pi_1(X,x_0)$ と表す.

証明. (1) $*$ が代表元の取り方によらないこと (well defined).

$[C_0]=[C_1]$，$[D_0]=[D_1]$ とし，$[C_0\cup D_0]=[C_1\cup D_1]$ である事を示す．C_0 から C_1 へのホモトピーを $\tilde{C}(s,t)$，D_0 から D_1 へのホモトピーを $\tilde{D}(s,t)$ とおく．

$$\tilde{C}\cup\tilde{D}(s,t)=\begin{cases}\tilde{C}(s,2t) & 0\leqq t\leqq\frac{1}{2}\\ \tilde{D}(s,2t-1) & \frac{1}{2}\leqq t\leqq 1\end{cases}$$

とおけば，$C_0\cup D_0$ から $C_1\cup D_1$ へのホモトピーになる．

(2) 結合法則 $[C]*([D]*[E])=([C]*[D])*[E]$

$C\cup(D\cup E)$ から $(C\cup D)\cup E$ へのホモトピーを作ればよい．$\cup$ の定義により

$$C\cup(D\cup E)(t)=\begin{cases}C(2t) & 0\leqq t\leqq\frac{1}{2}\\ D(4t-2) & \frac{1}{2}\leqq t\leqq\frac{3}{4}\\ E(4t-3) & \frac{3}{4}\leqq t\leqq 1\end{cases}\qquad (C\cup D)\cup E(t)=\begin{cases}C(4t) & 0\leqq t\leqq\frac{1}{4}\\ D(4t-1) & \frac{1}{4}\leqq t\leqq\frac{1}{2}\\ E(2t-1) & \frac{1}{2}\leqq t\leqq 1\end{cases}$$

なので，次がホモトピーを与える．

$$\tilde{C}(s,t)=\begin{cases}C((1-s)2t+s4t) & 0\leqq t\leqq\frac{1}{2+2s}\\ D((1-s)(4t-2)+s(4t-1)) & \frac{1}{2+2s}\leqq t\leqq\frac{3+s}{4+4s}\\ E((1-s)(4t-3)+s(2t-1)) & \frac{3+s}{4+4s}\leqq t\leqq 1\end{cases}$$

(3) 単位元

x_0 に値をとる定値写像を $1(t)=x_0$ と表す．$C\cup 1$ および $1\cup C$ から C へのホモトピーを作れば，$[1]$ が単位元であることが分かる．簡単なので問題にする．

(4) 逆元

$C^{-1}(t)=C(1-t)$ と定める．$C\cup C^{-1}$ および $C^{-1}\cup C$ から 1 へのホモトピーを作れば $[C^{-1}]$ が $[C]$ の逆元であることが分かる．これも簡単なので問題にする． ■

問題 1.4. (3)(4) の証明におけるホモトピーを具体的に構成せよ.

定義から基本群は x_0 を含む弧状連結成分で決まる．以下では弧状連結な位相空間のみ考えることにする．

命題 1.4. X が弧状連結なとき，基本群は基点のとり方によらない．すなわち次が成り立つ．

$$\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(X,x_1)$$

証明. x_0 から x_1 にいたる曲線を $\gamma:[0,1]\longrightarrow X$ とおく．また $\gamma^{-1}(t)=\gamma(1-t)$ と定める．$C\in C((I,\partial I),(X,x_0))$ に対し $\gamma^{-1}\cup C\cup\gamma\in C((I,\partial I),(X,x_1))$ となるが，これは $\pi_1(X,x_0)$ から $\pi_1(X.x_1)$ への準同型を定める．γ^{-1} によって同様に準同型を作れば，元の写像の逆写像になり，同型写像であることが示せる． ■

命題 1.5. 連続写像 $f:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$ について

$$f_*:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(Y,y_0),\qquad f_*([C])=[f\circ C]$$

は群の間の準同型を定める．さらに $g:(Y,y_0)\longrightarrow(Z,z_0)$ について $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$ が成り立つ．

証明. $C\sim D\Longrightarrow f\circ C\sim f\circ D$ より $f_*([C])$ は代表元の取り方によらない．$f\circ(C\cup D)=(f\circ C)\cup(f\circ D)$ より f_* は準同型である．後半は $(g\circ f)\circ C=g\circ(f\circ C)$ より成立する． ■

定理 1.6. 弧状連結な位相空間 X と Y について次が成り立つ.
(1) $f \simeq g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0) \Longrightarrow f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$
(2) $(X, x_0) \simeq (Y, y_0) \Longrightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$

証明. (1) $F : I \times (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ を f から g へのホモトピーとし $f_s(x) = F(s, x)$ とおく. 曲線 $C : (I, \partial I) \longrightarrow (X, x_0)$ について $f_s \circ C(t) = F(s, C(t))$ は $f \circ C$ から $g \circ C$ へのホモトピーを与える. ゆえに $f_*([C]) = g_*([C])$ であり $f_* = g_*$ が成り立つ.
(2) $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ と $g : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ について $g \circ f \simeq I_X$, $f \circ g \simeq I_Y$ が成り立つとする. 命題 1.5 により g_* は f_* の逆写像になる. ■

基本群はホモトピー同値な位相空間については共通である. このことをホモトピー群はホモトピー不変量であるという.

例 1.7. 1 点のみからなる集合の基本群は単位元のみからなる群 1 [*4]である. D^n は 1 点とホモトピー同値なので $\pi_1(D^n, 0) = 1$ である.

例 1.8. $n \geqq 2$ のとき $\pi_1(S^n, x_0) = 1$ である.

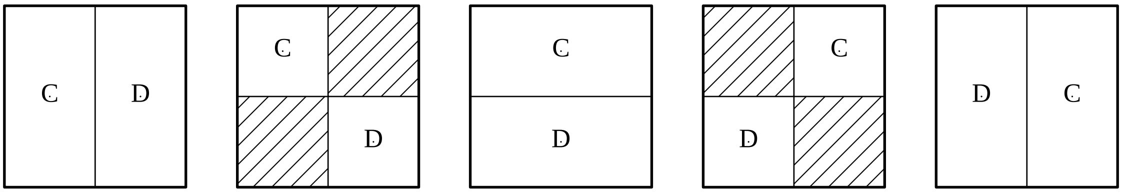
上の二つの例のように $\pi_1(X, x_0) = 1$ となる弧状連結位相空間を**単連結**(simply connected) と呼ぶ.
$I^n = I \times I \times \cdots \times I$ について $C((I^n, \partial I^n), (X, x_0))$ のホモトピー集合を $\pi_n(X, x_0)$ と表す. 群構造は

$$C \cup D(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} C(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & 0 \leqq t_1 \leqq \frac{1}{2} \\ D(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \frac{1}{2} \leqq t_1 \leqq 1 \end{cases}$$

として基本群の場合と同様に定める. この群を n 次**ホモトピー群**と呼ぶ. これについても基本群について示した事実が全て成り立つ. さらに

命題 1.7. $n \geqq 2$ の場合には $\pi_n(X, x_0)$ は可換群である.

証明. $n \geq 2$ の場合 $C \cup D$ から $D \cup C$ へのホモトピーは次のように構成できる. ただし, 境界及び斜線部はすべて基点 x_0 に移される.



■

1.3 被覆空間

X と Y を位相空間とし, さらに X は弧状連結であるとする. $f : Y \longrightarrow X$ が**被覆写像**（covering map）であるとは全射であって, かつ $\forall x \in X$ について x の開近傍 U を十分小さく選ぶことにより

$$f^{-1}(U)^{*5} = \cup V_\alpha \text{ (disjoined union)}, \qquad V_\alpha \text{は開集合}, \quad f_{|V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U \text{ は同相写像}$$

とできることをいう. またこのとき Y を X の**被覆空間**(covering space) と呼ぶ.

[*4] 群の単位元は 1 と記述されることがあるので 1 のみの群ということで 1 という表記にした. 可換群については 0 と書くことが多い.
[*5] $f^{-1}(U)$ は f による U の逆像であり, 逆写像 f^{-1} が存在しなくても定義できる.

$f^{-1}(\{x\})$ は Y の部分空間として離散空間[*6]になる．これを x 上の**ファイバー**とよび Y_x と表す．被覆写像の定義から $f^{-1}(U)$ は $U \times Y_x$ と同相である．

例 1.9. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とみなすとき

$$f_n : S^1 \longrightarrow S^1 \qquad f_n(z) = z^n,\ n \in \mathbb{N}$$
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \qquad f(x) = e^{2\pi x i}$$

は被覆写像である．

例 1.10. 同様に

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow T^n \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (e^{2\pi x_1 i}, e^{2\pi x_2 i}, \ldots, e^{2\pi x_n i})$$

も被覆写像である．

例 1.11. 実射影空間の定義における写像 $p : \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\} \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$ を $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ に制限した写像 $f : S^n \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$ は被覆写像である．S^n は $P^n(\mathbb{R})$ の被覆空間である．各 $x \in P^n(\mathbb{R})$ についてファイバー $f^{-1}(\{x\})$ は 2 点からなる．

例 1.12. 例 1.6 のレンズ空間 $L(p;q)$ について S^3 は $L(p;q)$ の被覆空間である．ファイバーは p 個の点からなる．

例 1.13. 写像 $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ を $f(z) = e^z$ で定めるとき，これは被覆写像である．

さて，X に基点 x_0 を定めておく．Y_{x_0} 上の点を一つとり y_0 とおく．I^n はコンパクトでありかつ可縮なので写像 $C : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ は Y への写像にリフトできる．

$$\begin{tikzcd} & (Y, Y_{x_0}) \arrow[d, "f"] \\ (I^n, \partial I^n) \arrow[ur, "\tilde{C}"] \arrow[r, "C"'] & (X, x_0) \end{tikzcd} \qquad \tilde{C}(0) = y_0$$

ここで注意すべきは $n \geqq 2$ の場合には ∂I^n が連結になることである．連結集合の連続写像による像は連結なので $\tilde{C}(\partial I^n) = \{y_0\}$ であり $\tilde{C} \in C((I^n, \partial I^n), (Y, y_0))$ となる．このことから次を得る．

定理 1.8. X, Y を弧状連結な位相空間とする．$f : Y \longrightarrow X$ が被覆写像ならば $n \geqq 2$ について $\pi_n(Y, y_0) \cong \pi_n(X, x_0)$ である．

証明. $[C] \in \pi_n(X, x_0)$ に対し $[\tilde{C}] \in \pi_n(Y, y_0)$ を対応させる写像が $f_* : \pi_n(Y, y_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$ の逆写像を与える． ■

$n = 1$ の場合は $C : (I, \partial I) \longrightarrow (X, x_0)$ について $\tilde{C}(1) \in Y_{x_0}$ は C によって異なる．$C \sim D$ であれば $\tilde{C}(1) = \tilde{D}(1)$ であり

$$\rho : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow Y_{x_0}, \qquad \rho([C]) = \tilde{C}(1)$$

が定まる．Y が弧状連結であるとき ρ は全射になる．また $\rho([C]) = \rho([D])$ であるとき，$\tilde{C}^{-1} \cup \tilde{D} : (I, \partial I) \longrightarrow (Y, y_0)$ なので $[C]^{-1}[D] \in f_*(\pi_1(Y, y_0))$ となる．これは逆も成り立つ．

[*6] 1 点が開集合であることを言う．開集合の合併は開集合なのですべての部分集合が開集合になる．

定理 1.9. Y が弧状連結ならば Y_{x_0} と $\pi_1(X,x_0)/f_*(\pi_1(Y,y_0))$ は一対一に対応する．特に X が単連結であれば X の弧状連結な被覆空間は自分自身に限る．

上の二つの定理から次が分かる．

命題 1.10. m 次元トーラス T^m について，次が成り立つ．

$$\pi_n(T^m,x_0)=\begin{cases}\mathbb{Z}^m & (n=1)\\ 0 & (n\geqq 2)\end{cases}$$

証明. 例 1.10 より被覆写像 $f:\mathbb{R}^m\longrightarrow T^m$ が存在する．$\mathbb{R}^m$ は可縮なのでホモトピー群はすべて単位元のみからなる．定理 1.8 により，T^m の 2 次元以上のホモトピー群は 0 である．

基本群については $x_0=f(\mathbf{0})$ を基点にとる．定理 1.9 より，$f^{-1}(x_0)=\mathbb{Z}^m$ と 1 対 1 に対応する．群構造をみるために，$\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_m)\in\mathbb{Z}^m$ について

$$C_{\boldsymbol{k}}(t)=f(tk_1,tk_2,\ldots,tk_m)\qquad C_{\boldsymbol{k}}\in C((I,\partial),(T^m,x_0))$$

と定める．定め方から $\rho([C_{\boldsymbol{k}}])=\boldsymbol{k}$ である．また

$$C_{\boldsymbol{k}}\cup C_{\boldsymbol{l}}\sim C_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}}$$

なので，ρ は準同型であり，全単射なので，同型になる． ■

X の単連結な被覆空間は唯一でありこれを X の**普遍被覆**(universal covering) と呼ぶ．普遍被覆は連結な被覆の中で最も大きな被覆とみなせる．例 1.11 より S^n は実射影空間 $P^n(\mathbb{R})$ の被覆空間であり，$n\geqq 2$ のときは普遍被覆になる．定理 1.9 より $\pi_1(P^n(\mathbb{R}),x_0)$ の位数は 2 であり， $\pi_1(P^n(\mathbb{R}),x_0)=\mathbb{Z}_2$ である．

同様にレンズ空間 $L(p;q)$ の普遍被覆は S^3 なので $\pi_1(L(p;q),x_0)$ の位数は p であり，p が素数なら p 次巡回群 $\mathbb{Z}_p$ である．実は p が素数でない場合も巡回群になることが以下の考察から示せる．

問題 1.5. レンズ空間の被覆写像を $f:S^3\longrightarrow L(p;q)$ と表す．また，$y_0\in S^3$ と $x_0=f(y_0)\in L(p;q)$ をとる．例 1.6 の写像 g について，y_0 から $g(y_0)$ にいたる曲線 D を一つ取り，$C=f\circ D$ とおけばこれは $L(p;q)$ における x_0 を基点とする閉曲線である．これについて

$$\rho(\underbrace{[C]*[C]*\cdots*[C]}_{k\text{ 個}})=g^k(y_0)$$

を示せ．また，$\pi_1(L(p;q),x_0)=\mathbb{Z}_p$ を示せ．

2　単体と単体複体

幾何学とは図形を対象とする学問であり，その最も素朴な対象はユークリッド幾何の対象である多面体や球面であろう．しかし，幾何学の対象はこのように素朴なものにとどまらない．図形の次元を一般にしたり，一般の曲面を扱ったり，図形を含む空間（特に $\mathbb{R}^N$）を排除したりする必要がある．

この節では図形を単体（三角形を一般次元に拡張した物）の集まりとして考察する．まずは単体とその集まりである単体複体を導入しよう．

2.1　単体

$\mathbb{R}^N$ の $k+1$ 個の点 $a_0, a_1, \ldots, a_k$ [*7]が**一般の位置**(general position) にあるとは $\{\overrightarrow{a_0 a_j} \mid 1 \leqq j \leqq k\}$ が一次独立であることを言う[*8]．このとき

$$\sigma = |a_0 a_1 a_2 \cdots a_k| = \left\{ \sum_{j=0}^{k} \lambda_j a_j \;\middle|\; \sum_{j=0}^{k} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geqq 0 \right\}$$

を k **単体**(k-simplex) と呼ぶ[*9]．一次独立の仮定から σ の各点について $\sum_{j=0}^{k} \lambda_j a_j$ の表示は一意的である．k を単体 σ の次元と呼ぶ．0 単体は 1 点，1 単体は線分，2 単体は 3 角形，3 単体は 4 面体である．a_j を σ の頂点という．

k 単体 $\sigma = |a_0 a_1 a_2 \cdots a_k|$ について $k+1$ 個の頂点から $r+1$ 個選んで r 単体 $\tau = |a_{j_0} a_{j_1} \cdots a_{j_r}|$ を作れるが，それを σ の**辺単体**(face) と呼び $\tau \prec \sigma$ （$\sigma \succ \tau$）と表す．k 単体の辺となる r 単体は ${}_{k+1}C_{r+1}$ 個ある．$r = k$ のときは辺単体は σ 自身であり，$r = 0$ のときは頂点である．

r 単体 σ の $r-1$ 次元以下の辺単体の合併集合を σ の**境界**といい，σ から境界を取り去った集合を σ の**内部**と呼び $\mathrm{Int}\sigma$ と表す．次が成り立つ．

命題 2.1.

$$\mathrm{Int}\sigma = \mathrm{Int}|a_0 a_1 a_2 \cdots a_k| = \left\{ \sum_{j=0}^{k} \lambda_j a_j \;\middle|\; \sum_{j=0}^{k} \lambda_j = 1,\ \lambda_j > 0 \right\}$$

証明. $x \in \sigma = |a_0 a_1 a_2 \cdots a_k|$ が辺単体 $x \in \tau = |a_{j_0} a_{j_1} \cdots a_{j_r}|$ に含まれるのは $x = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j a_j$ と表したとき $\lambda_{j_0}, \lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_r}$ 以外の係数がすべて 0 になることである．ゆえに係数の中に一つでも 0 のものがあることと，ある $k-1$ 次元以下の辺単体に含まれることは同値である．. ■

なお，0 単体については $\mathrm{Int}|a| = \{a\}$ と約束する．

問題 2.1. $x \in \sigma = |a_0 a_1 a_2 \cdots a_k|$ について，$x \in \mathrm{Int}\tau, \tau \prec \sigma$ となる τ が唯一つ存在することを示せ．

2.2　単体複体

$\mathbb{R}^N$ の有限個[*10]の単体からなる集合[*11]K が**単体複体**(simplicial complex) であるとは

(I) $\sigma \in K, \tau \prec \sigma \Longrightarrow \tau \in K$

(II) σ, τ が K に属し，かつ $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ であるとき，$\sigma \cap \tau$ もまた単体で $\sigma \cap \tau \prec \sigma$ かつ $\sigma \cap \tau \prec \tau$ となる．

が成り立つことを言う．

$\max\{\dim\sigma \mid \sigma \in K\}$ を K の**次元**と呼ぶ．非負整数 r について $K^{(r)} = \{\sigma \in K \mid \dim\sigma \leqq r\}$ を K の r **切片**(skeleton) と呼ぶ．これも単体複体である．0 切片 $K^{(0)}$ は K の頂点の集合に他ならない．

単体複体 K に対して $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ を K の定める多面体と呼ぶ．σ の境界は σ の辺単体に含まれるので，$|K|$ は $\mathrm{Int}\sigma$ の互いに交わらない合併 (disjoined union) になる．

[*7] 一年次の線形代数では $\mathbb{R}^N$ の要素はボールド体で表記したが，ここでは通常の字体で表す．スカラーかベクトルかは議論の内容で判断すること．

[*8] ここで a_0 を特別な扱いにしているが，他の点と入れ替えても一般の位置であると言う性質は変わらない．

[*9] 頂点を入れ替えても単体としては同一のものとみなす．

[*10] 一般には無限個の単体からなる単体複体を考える必要があるが，この講義では有限個の場合のみ扱う．

[*11] 単体の合併集合ではない．

例 2.1. n 単体 σ についてその辺単体全体の集合を $K(\sigma)$ とおけばこれは単体複体であり，その定める多面体は $|K(\sigma)| = \sigma$ となる．

この $n-1$ 切片を $K(\partial\sigma)$ と表す．この多面体は $|K(\partial\sigma)| = \sigma - \mathrm{Int}\sigma$ である．

問題 2.2. n 単体 σ について $K(\sigma)$ の単体の数を求めよ．また，$\sigma \in K \Longrightarrow K(\sigma) \subset K$ を示せ．

滑らかな曲面が与えられたとき，その曲面を隣り合う三角形の組で近似できることは容易に想像できるだろう．三角形は 2 単体なので，これらの三角形とその辺，頂点の集まりが単体複体である．曲面を単体複体の多面体で近似することを**単体分割**(simplicial decomposition)（あるいは三角形分割）と呼ぶ．次の例は，曲面の近傍に対応する概念を単体複体について考えたものである．

例 2.2. K を単体複体とし，a をその一つの頂点とする．

$$S_K(a) = \{\sigma \in K \mid \exists\tau \in K,\ \sigma \prec \tau,\ a \prec \tau\}$$

は K の部分複体であり，a の星状複体と呼ぶ．星状複体の作る多面体 $|S_K(a)|$ は $|K|$ における a の近傍である．

2.3　抽象複体

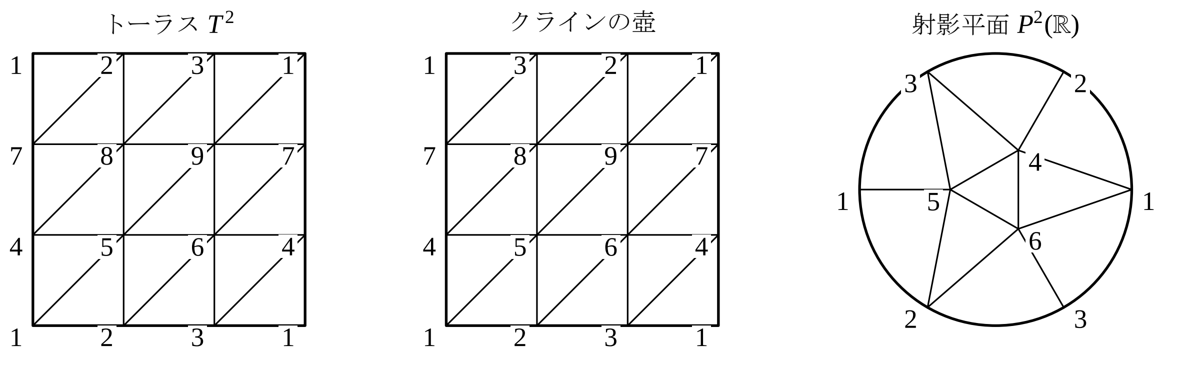
単体複体 K の頂点全体の集合（有限個の単体なので $\mathbb{R}^N$ の有限集合）を $A = K^{(0)}$ とすれば K の r 単体は A の要素 $r+1$ 個の部分集合が対応する．ゆえに K をべき集合 $\mathcal{P}(A)$ の部分集合とみなすことができる．一般に有限集合 A についてべき集合 $\mathcal{P}(A)$ の部分集合 $\mathcal{K}$ が**抽象複体**(abstract simplicial complex) であるとは

(I) $\emptyset \notin \mathcal{K}$

(II) $S \in \mathcal{K},\ \emptyset \neq T \subset S \Longrightarrow T \in \mathcal{K}$

を満たすことを言う．単体複体は抽象複体を定めるが逆に抽象複体を実現する単体複体を構成できる．例えば，A が N 個の要素からなるとし，A の要素を $\mathbb{R}^N$ の基本列ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ たちと一対一に対応付ける．$\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(A)$ の各要素について，対応する基本列ベクトルの組を頂点とする単体を対応させる．これらの単体の集まりは単体複体の条件を満たす．特にこの構成では 1 単体の長さはすべて $\sqrt{2}$ である．

射影空間やクラインの壺など，3 次元空間の中で実現できない図形を具体的な単体分割することは考えずらいだろう．しかし抽象複体により，単体のつながりさえ調べておけば良いことがわかる．以下の図はトーラス及びクラインの壺の単体分割を与える．いずれも 18 個の 2 単体と 27 個の 1 単体及び 9 個の 0 単体からなる．三つ目は射影平面 $P^2(\mathbb{R})$ の単体分割である．2 単体 10 個，1 単体 15 個，0 単体 6 個からなる．なお，各図において両端が 1,2 の線分が二つずつ存在するが，これは二つの辺が頂点の順序を保って貼り付けられていることを意味する．



2.4 単体写像

二つの単体複体 K と H について頂点の集合の間の写像 $\varphi : K^{(0)} \longrightarrow H^{(0)}$ が**単体写像**(simplicial map) であるとは，任意の K の単体 $\sigma = |a_0a_1a_2\cdots a_r|$ について $\varphi(\{a_0, a_1, \ldots, a_r\}) = \{b_0, b_1, \ldots, b_s\}$ [*12]たちが H のある単体の頂点をなすこと，すなわち $\tau = |b_0b_1b_2\cdots b_s| \in H$ が成り立つことを言う．定義から単体写像の合成は単体写像である．

さらに単体写像は多面体の間の連続写像 $\tilde{\varphi} : |K| \longrightarrow |H|$ を定める．定義は $x \in \mathrm{Int}|a_0a_1a_2\cdots a_r|$ について[*13]

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}\left(\sum_{j=0}^{r} \lambda_j a_j\right) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j \varphi(a_j)$$

とすれば良い．$\tilde{\varphi}(\mathrm{Int}\sigma) = \mathrm{Int}\varphi(\sigma)$ である．

3 単体複体のホモロジー

この節では単体複体のホモロジーを定義する．しかしホモロジー群は本来図形に対して定義するべき概念であり，単体複体に対して定義するだけでは不十分である．図形のホモロジーを定義するには，与えられた図形と同相な単体複体による多面体を作り（これを図形の単体分割と呼ぶ）その単体複体のホモロジーによって定める．その際重要になるのは，ホモロジー群が単体分割の仕方によらないことだ．この議論については煩雑なのでこの講義では扱わない．興味のある人はシラバスの参考文献にあげた田村一郎の「トポロジー」などを読んで欲しい．

3.1 ホモロジー群の定義

単体 $\sigma = |a_0a_1a_2\cdots a_r|$, $r \geqq 1$ に頂点の順序を指定したとき**有向単体**(oriented simplex) と呼び $\langle\sigma\rangle = \langle a_0a_1a_2\cdots a_r\rangle$ と表す．ただし，偶数回の並び替えで移りあうものは同じ有向単体とみなす．向きは一つの単体について二通りであり，逆向きのものを $-\langle\sigma\rangle$ と表す．0 単体については向きは意味を持たないが $\langle\sigma\rangle = \langle a_0\rangle$ と表す．

単体複体 K について，その 1 次元以上の単体に向きを定めておく．その r 単体を $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ とおくとき，それらの形式的な整数倍の和全体の集合を

$$C_r(K) = \left\{\sum_{j=1}^{s} m_j \left\langle\sigma_j\right\rangle \mid m_j \in \mathbb{Z}\right\}$$

とおく．これはランク s の自由アーベル群 $\mathbb{Z}^s = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}$ と同型な群になる．これを K の r 次元**鎖群**(group of chains) と呼び，またその要素を r **鎖**（r-chain）と呼ぶ．この定義で $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{R}$ に置き換えたものを $C_r(K;\mathbb{R})$ と表す．これは s 次元実線形空間である．以下の諸定義は係数を $\mathbb{Z}$ として記述するが $\mathbb{R}$ の場合でもまったく同様である．

r 有向単体 $\langle\sigma\rangle = \langle a_0a_1a_2\ldots a_r\rangle$ について

$$\partial_r\langle\sigma\rangle = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\left\langle a_0a_1\cdots\hat{a}_j\cdots a_r\right\rangle \in C_{r-1}(K)^{*14}$$

[*12] 一対一を仮定していないので像の点の個数 s は r より小さくなりえる．

[*13] 多面体は $\mathrm{Int}\sigma$ の disjoined union なのでこのような単体は点 x に対して唯一つである．

[*14] $\hat{a}_j$ としているのは配列から a_j を除くことを意味している．

と定める．これから r 次元鎖群から $r-1$ 次元鎖群への準同型写像（**境界作用素**(boundary operator) という）が定められる．

$$\partial_r : C_r(K) \longrightarrow C_{r-1}(K)$$

r 鎖 $c \in C_r(K)$ が $\partial_r c = 0$ を満たすとき r **輪体**（r-cycle）とよぶ．$b \in C_{r+1}(K)$ で $c = \partial_{r+1} b$ となるものが存在するとき r **境界輪体**（r-boundary）とよぶ．r 輪体全体の集合を $Z_r(K) = \mathrm{Ker}\partial_r$ とおき r **輪体群**と呼ぶ．r 境界輪体全体の集合を $B_r(K) = \mathrm{Im}\partial_{r+1}$ とおき r **境界輪体群**と呼ぶ．

定理 3.1. (1) $\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0$　(2) $B_r(K) \subset Z_r(K) \subset C_r(K)$

証明. (1) $\langle\sigma\rangle = \langle a_0 a_1 a_2 \ldots a_r a_{r+1}\rangle \in C_{r+1}(K)$ について $\partial_r \circ \partial_{r+1}(\langle\sigma\rangle) = 0$ を示す．境界作用素の定義により

$$\begin{aligned}\partial_r\left(\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^j\left\langle a_0a_1\cdots\hat{a}_j\cdots a_{r+1}\right\rangle\right) &= \sum_{j=0}^{r+1}(-1)^j\partial_r\left\langle a_0a_1\cdots\hat{a}_j\cdots a_{r+1}\right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{r+1}(-1)^{\mathrm{j}}\left(\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k\left\langle a_0a_1\cdots\hat{a}_k\cdots\hat{a}_j\cdots a_{r+1}\right\rangle + \sum_{k=j+1}^{r+1}(-1)^{k-1}\left\langle a_0a_1\cdots\hat{a}_j\cdots\hat{a}_k\cdots a_{r+1}\right\rangle\right)\end{aligned}$$

を得るが，結局頂点を二つ取り除いた有向単体に ± をつけて加え合わせているに過ぎない．a_p と a_q を取り除いたものは $j = p, k = q$ のときと $j = q, k = p$ のときの二つの項があるが，それらの符号は $(-1)^{p+q}$ と $(-1)^{p+q-1}$ で正負が入れ替わる．ゆえにすべて加え合わせると 0 になる．
(2) $b \in B_r(K) = \mathrm{Im}\partial_{r+1}$ について $\partial_r(b) = 0$ を示せばよい． ■

これにより剰余群 $H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$ が定まるがこれを K の r 次元**ホモロジー群**(homology group) と呼ぶ．また二つの輪体（cycle）が同じ剰余類に属するとき**ホモロガス**(homologous) であるといい $c \sim d$ と表す．またこの同値類を**ホモロジー類**(homology class) と呼び $[c]$ と表す．演算は和として表示しているので $[c] = c + B_r(K)$ である．

さて $C_r(K)$ は $\mathbb{Z}$ の有限個の直和なので $H_r(K)$ は有限生成アーベル群である．ゆえに有限生成アーベル群の基本定理から

$$H_r(K) = \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{R_r\text{個}}\oplus\mathbb{Z}_{\theta_{r,1}}\oplus\mathbb{Z}_{\theta_{r,2}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{\theta_{r,jr}}$$

と $\mathbb{Z}$ と有限巡回群の直和として並べ方を除いて唯一通りに表せる．この直和における $\mathbb{Z}$ の個数 R_r を r 次元**ベッチ数**(Betti number)，$\theta_{r,j}$ たちを r 次元**捩れ係数**(torsion coefficients) と呼ぶ．係数を実数にした場合，$H_r(K;\mathbb{R}) = Z_r(K;\mathbb{R})/B_r(K;\mathbb{R})$ を**実係数ホモロジー**という．これは R_r 次元の線形空間である．

さて，定義はできたがこの段階でホモロジーの計算を行うことは困難である．簡単な例のみ紹介しておく．$C_r(K)$ を r 単体を基底とする有限次元線形空間の格子点集合とみなせば，境界作用素は線形変換なので行列で表示できる．例えば 2 単体 $\sigma = |abc|$ について $K = K(\sigma)$ を考えれば

- $C_0(K)$ の基底は $\{\langle a\rangle, \langle b\rangle, \langle c\rangle\}$
- $C_1(K)$ の基底は $\{\langle ab\rangle, \langle bc\rangle, \langle ca\rangle\}$
- $C_2(K)$ の基底は $\{\langle abc\rangle\}$

とみなせる．これについての境界作用素の表現行列は

$$\partial_2 \sim \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \partial_1 \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

なので核（$Z_r(K)$）と像（$B_r(K)$）は線形代数の知識で求められる．

$$Z_2(K) = B_2(K) = 0, \qquad Z_1(K) = B_1(K) = \{m(\langle ab\rangle + \langle bc\rangle + \langle ca\rangle) \mid m \in \mathbb{Z}\}$$
$$B_0(K) = \{h\langle a\rangle + i\langle b\rangle + j\langle c\rangle \mid h+i+j=0\},\ Z_0(K) = C_0(K)$$

これから

$$H_0(K) = \mathbb{Z}, \quad H_1(K) = H_2(K) = 0$$

を得る．同じ考えは 3 単体についても使える．結果のみまとめておく．

例 3.1. 3 単体 σ について

$$H_k(K(\sigma)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

単体複体 K とその r 切片 $K^{(r)}$ について，$k \leqq r$ ならば $C_k(K^{(r)}) = C_k(K)$，$k > r$ ならば $C_k(K^{(r)}) = 0$ が成り立つ．これより直ちに

$$H_k\left(K^{(r)}\right) = \begin{cases} H_k(K) & (k < r) \\ 0 & (k > r) \end{cases}$$

を得る．$H_r(K^{(r)})$ については $B_r(K^{(r)}) = 0$ と $Z_r(K^{(r)}) = Z_r(K)$ より

$$H_r(K^{(r)}) = Z_r(K)$$

である．

もう少し具体的な多面体で考えよう．$\mathbb{R}^3$ 内の閉じた曲面 S を考え，単体複体 K による多面体としておこう．S 上の (自己交差を持たない) 閉曲線を 1 単体の列 $\{|a_{i-1}a_i| \mid i = 1,2,\dots r,\ a_0 = a_r\}$ として実現すれば $\sum_{i=1}^{r}\langle a_{i-1}a_i\rangle$ は 1 輪体 (サイクル) である．これらをいくつか集めたものが $Z_1(K)$ の要素である．曲面上の一つの領域が 2 単体の集まりとみなすとき，その境界はいくつかの閉じた曲線の集まりになる．これが 1 境界輪体 (バウンダリー) である．二つのサイクルの間が一つの領域になっているとき，二つのサイクルは同じホモロジー類を定める．この節で導入した概念は，これを一般次元を含めて一般化したものである．

3.2 ホモロジー群の簡単な性質

K の r 次元ベッチ数を R_r とおくとき

$$\chi(K) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j R_j$$

を K の**オイラー数**(Euler number) と呼ぶ．ここで m は単体複体の次元（単体の次元の最大）である．

定理 3.2. K の r 単体の個数を α_r とおけば次が成り立つ．

$$\chi(K) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \alpha_j$$

証明. 実係数で考えれば線形空間と線形写像に対する議論になるので $\dim \mathrm{Im}\partial_p + \dim \mathrm{Ker}\partial_p = \dim B_{p-1}(K;\mathbb{R}) + \dim Z_p(K;\mathbb{R}) = \dim C_p(K;\mathbb{R}) = \alpha_p$ と $R_p = \dim H_p(K;\mathbb{R}) = \dim Z_p(K;\mathbb{R}) - \dim B_p(K;\mathbb{R})$ を得る． ■

3 次元空間内の多面体において，面の数 − 辺の数 + 頂点の数をオイラー数という．面を対角線ですべて三角形に分割すれば，単体複体の多面体として理解できるが，この定理はこの講義でのオイラー数と，上の素朴な意味でのオイラー数が同じものであることを表している．

K の任意の二つの頂点が 1 単体の列で結べるとき K は**連結**(connected) であるという．

定理 3.3. 連結な単体複体について $H_0(K) = \mathbb{Z}$ が成り立つ．

証明．$\partial_1 \langle a, b\rangle = \langle b\rangle - \langle a\rangle$ より $\sum_j \lambda_j \left\langle a_j \right\rangle \in B_0(K) = \mathrm{Im}\partial_1$ は $\sum_j \lambda_j = 0$ を満たす．また，二つの頂点 a, b についてこれらを結ぶ 1 単体の列 $\{|b_{j-1}b_j| \in K. 1 \leq j \leq n\}$, $b_0 = a$, $b_n = b$ をとれば

$$\langle b\rangle - \langle a\rangle = \partial_1 \left(\sum_{j-1}^{n} \left\langle b_{j-1} b_j \right\rangle \right) \in B_0(K)$$

を得る．$Z_0(K) = C_0(K)$ と合わせて結果を得る． ■

単体複体 K の頂点全体の集合 $K^{(0)}$ に 1 単体で結べることによって同値関係を入れる．この同値類を $A_1, A_2, \ldots A_m$ とおくとき，K の各単体の頂点はそのうちの一つの同値類に入る．

$$K_j = \{\sigma \in K \mid \sigma の頂点 \in A_j\}$$

とおけば K_j は連結な単体複体になる．これを K の**連結成分**(connected component) と呼ぶ．二つの連結成分，例えば K_1 と K_2 に共通の単体があれば，その頂点は A_1 と A_2 の双方に含まれることになり，同値類であることに矛盾する．共通な単体は存在せず

$$C_r(K) = C_r(K_1) \oplus C_r(K_2) \oplus \cdots \oplus C_r(K_m)$$

が成り立つ．境界作用素 ∂_r もそれぞれの直和成分に制限して考えることができるので，$Z_r(K)$, $B_r(K)$ も直和になる．このことから次の定理を得る．

定理 3.4. $H_r(K) = H_r(K_1) \oplus H_r(K_2) \oplus \cdots \oplus H_r(K_m)$.
特に，$H_0(K)$ は K の連結成分の個数だけ $\mathbb{Z}$ を直和したものである．R_0 は連結成分の個数を表す．

単体複体 K が a を頂点とする**錘複体**(cone complex) であるとは，任意の $\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_r| \in K$ について $a \prec \sigma$ でなければ $|a a_0 a_1 \cdots a_r| \in K$ が成り立つことを言う．

定理 3.5. 錘複体のホモロジー群は $H_0(K) = \mathbb{Z}$ であって，$H_r(K) = 0$, $r \geqq 1$ となる．このようなホモロジー群を持つ複体を**非輪状**(acyclic) とよぶ．

証明．$D_r : C_r(K) \longrightarrow C_{r+1}(K)$ を $D_r(\langle a_0 a_1 \cdots a_r\rangle) = \langle a a_0 a_1 \cdots a_r\rangle$ で定義する．ただし a_j たちの中に a があるときは 0 とする．

$$(\partial_{r+1} \circ D_r + D_{r-1}\partial_r)(c) = c$$

が成り立つ．これから $r \geqq 1$ について $\mathrm{Ker}\partial_r \subset \mathrm{Im}\partial_{r+1}$ となり，$H_r(K) = 0$ を得る．錘複体は連結なので $H_0(K) = \mathbb{Z}$ である． ■

$\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_n|$ について $K(\sigma)$ は a_0 を頂点とする錘複体になる．ゆえに $K(\sigma)$ は非輪状である．$K(\partial\sigma)$ は $K(\sigma)$ から一つの n 単体を除いただけなので，ホモロジーの定義により次を得る．

$$H_k(K(\partial\sigma)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, n-1) \\ 0 & (k \neq 0, n-1) \end{cases}$$

3.3　鎖準同型

二つの単体複体 K, H について準同型写像の組 $h_r : C_r(K) \longrightarrow C_r(H)$, $r \geqq 0$ が**鎖準同型**(chain homomorphism) であるとは

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & C_{r+1}(K) \arrow[r, "\partial^K_{r+1}"] \arrow[d, "h_{r+1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_r(K) \arrow[r, "\partial^K_r"] \arrow[d, "h_r"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_{r-1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "h_{r-1}"] & {} \\
\arrow[r] & C_{r+1}(H) \arrow[r, "\partial^H_{r+1}"'] & C_r(H) \arrow[r, "\partial^H_r"'] & C_{r-1}(H) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

が成り立つことを言う．ここで $\circlearrowleft$ はこの図式が可換であること（$\partial^H_r \circ h_r = h_{r-1} \circ \partial^K_r$ 等）を意味する．

命題 3.6. 鎖準同型はホモロジー群の準同型を誘導する．それを $h_{*r} : H_r(K) \longrightarrow H_r(H)$ と表す．ここで $h_{*r}([z]) = [h_r(z)]$ である．

証明. $z \in Z_r(K)$ ならば $\partial^H_r \circ h_r(z) = h_{r-1} \circ \partial^K_r(z) = 0$ より $h_r(z) \in Z_r(H)$ である．$[z] = [w]$ のとき $z - w = \partial^K_{p+1}(c)$ とおけば

$$h_r(z) - h_r(w) = h_r \circ \partial^K_{p+1}(c) = \partial^H_{p+1}(h_{r+1}(c)) \in B_r(H)$$

となるので $[h_r(z)]$ は代表元の取り方によらない． ■

単体写像 $\varphi : K \longrightarrow H$ について $\varphi_{\#r} : C_r(K) \longrightarrow C_r(H)$ を

$$\varphi_{\#r}(\langle a_0 a_1 \cdots a_r \rangle) = \langle \varphi(a_0)\varphi(a_1) \cdots \varphi(a_r) \rangle$$

で定める．ただし，$\varphi(a_0), \varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_r)$ の中に同じ頂点があるときは 0 とする．このとき，$\{\varphi_{\#r}\}$ は鎖準同型となり，ホモロジー群の準同型を定める．これを

$$\varphi_{*r} : H_r(K) \longrightarrow H_r(H)$$

と表す．

単体写像 $\varphi : K \longrightarrow H$ と $\psi : H \longrightarrow L$ について合成写像が定義できる．このとき次が成り立つ．

命題 3.7.

$$(\psi \circ \varphi)_{*r} = \psi_{*r} \circ \varphi_{*r} : H_r(K) \longrightarrow H_r(L)$$

証明. 定義から $\psi_{\#r} \circ \varphi_{\#r} = (\psi \circ \varphi)_{\#r}$ である． ■

ホモロジーとは，単体複体と単体写像の世界から，アーベル群と準同型の世界への対応とみなせる．群の構造を調べることにより単体複体（多面体）の様々な性質を調べることが可能になる．現代数学の最も基本的な考察方法の一つである．

3.4　マイヤー・ビートリス完全系列

単体複体のホモロジー群を求める際に役立つ定理としてマイヤー・ビートリス完全系列を紹介する．

アーベル群の列 $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ と準同型写像 $f_j : A_{j-1} \longrightarrow A_j$ の定める系列

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

が**完全系列**(exact sequence) であるとは $\mathrm{Ker} f_{j+1} = \mathrm{Im} f_j$ がすべての j について成り立つことを言う．

K_1, K_2 を K の部分複体とし $K = K_1 \cup K_2$ が成り立っているとする．このとき $K' = K_1 \cap K_2$ も K の部分複体である．これらの包含写像の定める単体写像を次のように名づけておく．

$$\begin{tikzcd} & K_1 \arrow[dr, "j"] & \\ K' \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & K \\ & K_2 \arrow[ur, "j'"'] & \end{tikzcd}$$

$z \in Z_r(K)$ について $Z_r(K) \subset C_r(K) = C_r(K_1) + C_r(K_2)$ より $z = c_1 + c_2$, $c_1 \in C_r(K_1)$, $c_2 \in C_r(K_2)$ と表す．$\partial_r z = \partial_r c_1 + \partial_r c_2 = 0$ より $\partial_r c_1 = -\partial_r c_2 \in C_{r-1}(K_1) \cap C_{r-1}(K_2) = C_{r-1}(K')$ である．さらに $\partial_{r-1}(\partial_r c_1) = 0$ より $\partial_r c_1 \in Z_{r-1}(K')$ を得る．これによりホモロジー群の準同型

$$\varDelta_r : H_r(K) \longrightarrow H_{r-1}(K'), \qquad \varDelta_r([z]) = [\partial_r c_1]$$

が得られる．さらに

$$\psi_r : H_r(K') \longrightarrow H_r(K_1) \oplus H_r(K_2), \qquad \psi_r([z]) = i_{*r}([z]) \oplus (-i'_{*r}([z]))$$
$$\phi_r : H_r(K_1) \oplus H_r(K_2) \longrightarrow H_r(K), \qquad \psi_r([z_1] \oplus [z_2]) = j_{*r}([z_1]) + j'_{*r}([z_2])$$

とおくとき，

定理 3.8. 次の系列は完全である．これをマイヤー・ビートリス完全系列という．

$$\longrightarrow H_{r+1}(K) \xrightarrow{\varDelta_{r+1}} H_r(K') \xrightarrow{\psi_r} H_r(K_1) \oplus H_r(K_2) \xrightarrow{\phi_r} H_r(K) \longrightarrow$$
$$\cdots \longrightarrow H_0(K) \longrightarrow 0$$

証明．示すべきことは

$$\psi_r \circ \varDelta_{r+1} = 0, \quad \phi_r \circ \psi_r = 0, \quad \varDelta_r \circ \phi_r = 0, \quad \mathrm{Ker}\psi_r \subset \mathrm{Im}\varDelta_{r+1}, \quad \mathrm{Ker}\phi_r \subset \mathrm{Im}\psi_r, \quad \mathrm{Ker}\varDelta_r \subset \mathrm{Im}\phi_r$$

の 6 つである． ■

これを利用すると簡単に次の事実が得られる．

命題 3.9. $K = K_1 \cup K_2$ において $K' = K_1 \cap K_2$ が非輪状であれば

$$H_r(K) \cong H_r(K_1) \oplus H_r(K_2), \qquad r \geqq 1$$

証明．$r \geq 1$ について $H_r(K') = 0$ なので $r \geq 2$ について

$$0 \longrightarrow H_r(K_1) \oplus H_r(K_2) \xrightarrow{\phi_r} H_r(K) \longrightarrow 0$$

が成り立つ．これは $H_r(K) \cong H_r(K_1) \oplus H_r(K_2)$ を意味する．$r = 1$ のときは

$$0 \longrightarrow H_1(K_1) \oplus H_1(K_2) \xrightarrow{\phi_1} H_1(K) \xrightarrow{\varDelta_1} H_0(K')$$

であるが $\varDelta_1([z]) = [\partial_1(c_1)]$ であり 1 単体の境界を集めたもののホモロジー類である．頂点の係数の和は 0 であり，$\varDelta_1([z]) = 0$ となる．$\mathrm{Im}\phi_1 = \mathrm{Ker}\varDelta_1 = H_1(K)$ なので ϕ_1 は全射であり同型写像になる． ■

例 3.2. r 個の $K(\partial\sigma^1)$ を一つの頂点で束ねた単体複体 K について

$$H_1(K) = \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{r\text{ 個}}$$

である．$|K|$ を S^1 を r 個束ねた**ブーケ**(bouquet) と呼ぶ.

問題 3.1. 2 次元ベッチ数が 2，1 次元ベッチ数が 3 の連結な 2 次元単体複体を構成せよ.

3.5　図形のホモロジー

図形 X のホモロジーを定義するには，X に同相な多面体 $|K|$ を作り，そのホモロジーによって定義する．これを保障するのが次の定理であるが証明は行わない.

定理 3.10. 二つの単体複体 K と H について $|K| \cong |H|$ であれば $H_r(K) \cong H_r(H)$ がすべての r について成り立つ.

次に単体分割可能な図形の間の連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ を考えよう．X の単体分割を十分細かく取ってやると，f は単体写像の定める多面体間の写像で近似できることが示される．単体写像はホモロジー群の間の準同型写像を定めるが，これは単体分割の仕方，単体写像による近似の取り方によらないことが示せる．よって連続写像はホモロジー群の間の準同型

$$f_{*r} : H_r(X) \longrightarrow H_r(Y)$$

を定める．この準同型は次を満たす.

定理 3.11. (1) $f : X \longrightarrow Y$ と $g : Y \longrightarrow Z$ について

$$(g\circ f)_{*r} = g_{*r}\circ f_{*r} : H_r(X) \longrightarrow H_r(Z)$$

(2) $f \simeq g : X \longrightarrow Y$ であれば

$$f_{*r} = g_{*r} : H_r(X) \longrightarrow H_r(Y)$$

(3) $X \simeq Y$ ならば $H_r(X) \cong H_r(Y)$ が成り立つ.

$H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ よりこの生成元を α とおく．連続写像 $f : S^n \longrightarrow S^n$ について $f_*(\alpha) = d\alpha$ により定まる整数 d を f の**写像度**(mapping degree) と呼ぶ．これは生成元の取り方によらず，またホモトピックな二つの写像については等しくなる．これを利用して次の定理を示そう.

定理 3.12 (Brouwer の不動点定理)**.** 連続写像 $f : D^n \longrightarrow D^n$ は不動点 ($f(x) = x$ を満たす点) を持つ.

証明．不動点が存在しないとする．$x \in S^{n-1}$ と $t \in [0,1]$ に対して $f(tx)$ を始点とし tx に向かう半直線が始点以外で $\partial D^n = S^{n-1}$ と交わる点を $F(t,x)$ とおく.

$$F : [0,1]\times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$

は連続であり，$F(1,x) = x$ が成り立つ．また $c = -f(0)/|f(0)| \in S^{n-1}$ とおけば $F(0,x) = c$ である．すなわち F は c への定値写像から恒等写像へのホモトピーである．しかし定値写像の写像度は 0，恒等写像の写像度は 1 なのでこれは矛盾を導く. ■

4　位相多様体

数学で最もよく扱われる図形は多様体である．これはハウスドルフ空間であって，各点についてユークリッド空間の開球と同相な近傍を持つ図形のことである．例えば第 1 節で述べた図形はすべて多様体か境界を持つ多様体である．

4.1　位相多様体の定義と例

ハウスドルフ位相空間 M の各点が $\mathbb{R}^n$ の開球 $B^n = \{\boldsymbol{x} \mid |\boldsymbol{x}| < 1\}$ と同相な近傍を持つとき n 次元**位相多様体**(topological manifold) という．

例 4.1. S^n は n 次元位相多様体である．D^n は境界上の点が条件を満たさないので多様体ではない．*15ただし境界を取り去った B^n 自身は多様体である．同様にメービスの帯は境界を取り去れば多様体である．その他の第 1 節で紹介した図形の例はすべて多様体である．

命題 4.1. C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ と $c \in \mathbb{R}^m$ について $M_c = f^{-1}(c)$ が特異点（$\mathrm{rank} df < m$ となる点）を持たなければ多様体である．

証明. $a \in M_c$ をとる．df_a は階数 m の $m \times (n+m)$ 型行列なので，必要なら $\mathbb{R}^{n+m}$ の座標の順序を変えて $df_a = (A, B)$ で A は正則行列して一般性を失わない．$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $x_1 \in \mathbb{R}^m$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$ と表し

$$F : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}, \qquad F(x) = F(x_1, x_2) = (f(x), x_2)$$

と定める．dF_a は正則行列になるので逆写像定理により F は $F(a) = F(a_1, a_2) = (f(a), a_2) = (c, a_2)$ の近傍で逆写像を持つ．$\mathbb{R}^n$ における a_2 の開近傍 U をとり

$$\varphi : U \longrightarrow M_c, \qquad \varphi(y) = F^{-1}(c, y)$$

とおけば $a \in M_c$ の近傍と U の同相写像を与える． ■

命題 4.2. $SL(n, \mathbb{R})$ = 行列式 1 の正方行列全体の集合は $n^2 - 1$ 次元多様体である．$O(n)$ = n 次直交行列全体の集合は $(n^2 + n)/2$ 次元多様体である．

証明. n 次正方行列全体の集合 $M(n)$ を $\mathbb{R}^{n^2}$ とみなす．行列式について

$$|A + tB| = |A| + t|A|\mathrm{Tr}(A^{-1}B) + O(t^2)$$

なので，$SL(n, \mathbb{R})$ は行列式の特異点を持たない．ゆえに $SL(n, \mathbb{R})$ は多様体である．

対称行列全体の集合 $S(n)$ をその上三角部分により $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ とみなす．写像

$$f : M(n) = \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow S(n) = \mathbb{R}^{n(n+1)/2}, \qquad f(A) = {}^t AA$$

とすれば $O(n) = f^{-1}(\{E_n\})$ である．

$$f(A + tB) = f(A) + t({}^t AB + {}^t BA) + O(t^2)$$

より，df_A は $A \in O(n)$ において全射である．よって $O(n)$ は多様体である． ■

単体複体 K についてその多面体 $|K|$ が n 次元多様体であれば次が成り立つ．

*15 これらを含めて境界付き多様体が定義されるがここでは省略する．

- $|K|$ は K の n 次元単体の合併である．K は $n+1$ 次元以上の単体を含まない．
- K の $n-1$ 単体はちょうど 2 個の n 単体の共通の辺単体になっている．

さらに $|K|$ が連結な n 次元多様体であれば

- $|K| - |K^{(n-2)}|$ は連結である．

が成り立つ．もちろん以上の条件だけでは $|K|$ が位相多様体になるとはいえない．多様体に相当する複体とはどういう条件を満たすべきかはここでは省略する．

さて，この講義で考えている単体複体は有限個の単体からなるのでコンパクトである．コンパクトで境界を持たない多様体を**閉多様体**(closed manifold) と呼ぶ．

4.2 多様体の向きと基本ホモロジー類

n 次元単体複体 K において $n-1$ 単体 τ を共通の辺単体として持つ二つの n 単体を σ_1, σ_2 をとる．それぞれに向きを与えたとき $\partial(\langle\sigma_1\rangle + \langle\sigma_2\rangle)$ における $\langle\tau\rangle$ の係数が 0 となる場合に $\langle\sigma_1\rangle$ と $\langle\sigma_2\rangle$ の向きは同調していると言う．$|K|$ が n 次元閉位相多様体であるとする．K のすべての n 単体に向きを定め，隣り合う二つの n 単体の向きがすべて同調しているようにできるとき $|K|$ は**向き付け可能**(orientable) であると言う．

定理 4.3. $|K|$ が連結な n 次元閉位相多様体であるとき，

$$H_n(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & |K| \text{ が向き付け可能} \\ 0 & |K| \text{ が向き付け不可能} \end{cases}$$

証明. K は n 次元なので，$B_n(K) = 0$ であり，$H_n(K) = Z_n(K)$ である．K の n 単体を σ_j, $1 \leqq j \leqq R$ とし，n 輪体 $z = \sum m_j\langle\sigma_j\rangle \in Z_n(K)$ をとる．$\partial z = 0$ において，一つの $n-1$ 単体 $\langle\tau\rangle$ の係数は，τ を辺とする n 単体を σ_j, σ_k とすれば $\pm m_j \pm m_k$ である．ゆえに $|m_j| = |m_k|$ が成り立つ．

連結性から二つの n 単体は隣り合う n 単体の列で結べるので，$|m_j|$ はすべて等しい．また必要なら $\langle\sigma_j\rangle$ の向きを入れ替えて

$$z = m\sum_{j=1}^{R}\langle\sigma_j\rangle$$

として良い．$m \neq 0$ の場合，$\partial z = 0$ は隣り合う n 単体の向きが同調していることを意味するので向き付け可能である．z は $\sum\langle\sigma_j\rangle$ の整数倍となり，$H_n(K) = Z_n(K) = \mathbb{Z}$ を得る．向き付け不可能な場合は $m = 0$ となり，$H_n(K) = Z_n(K) = 0$ を得る． ■

向き付け可能な連結閉位相多様体 M について $H_n(M) = \mathbb{Z}$ のとき向き付け可能という．向き付け可能な場合にその生成元をとることを向きを定めるという．またその生成元を**基本ホモロジー類**(fundamental class) と呼ぶ．単体複体の多面体として実現されている場合には，この証明における $\sum\langle\sigma_j\rangle$ が基本ホモロジー類である．

命題 4.4. 多様体 $|K|$ が単連結ならば向き付け可能である．

証明. $|K|$ の基点 x_0 をとる．x_0 を含む一つの n 単体 σ に向きを定める．別の n 単体 τ について，x_0 から $x \in \tau$ にいたる曲線 C をひとつ決めれば，それに沿って隣り合う n 単体に同調する向きを入れることによって τ の向きを決めることができる．

別の曲線 D によっても同様に向きを入れられるが，単連結性から C と D がホモトピックなので τ の向きは曲線の取り方によらない．ゆえに，すべての n 単体に一斉に向きを決めることができる． ■

K の r 次元部分複体 H について

- H の $r-1$ 単体は一つまたは二つの H の r 単体の辺になっている．
- H の二つの r 単体は，隣り合う H の r 単体の列で結ぶことができる．
- H の r 単体の向きを隣り合うものがすべて同調するようにとれる．それを $\langle\sigma_j\rangle$ とする．

としよう．$c=\sum\langle\sigma_j\rangle$ について ∂c は H のちょうど一つの r 単体の辺となる有向 $r-1$ 単体の和である．そのような $r-1$ 単体がなければ，$\partial c=0$ であり，c は K の r 次元輪体である．$\partial c\neq 0$ の場合には ∂c は輪体であるが，c の境界になっているので，ホモロジー群では 0 である．

この理解は閉位相多様体 M のホモロジー群を直感的に理解するのに有効である．r 次元輪体とは M の r 次元の向きづけられた連結閉部分多様体（およびそれらの形式的和）とみなしてよいし，それが $r+1$ 次元の向きづけられた境界付き部分多様体の境界になっているときが r 次元境界輪体である．例えば，x_0 を基点とする閉曲線 C は M の 1 輪体である．これが 1 点とホモトピックなとき，円板から M への写像で C を境界とするものが存在する．すなわち C の定めるホモロジー類は 0 である．こうして

$$h:\pi_1(x_0,M)\longrightarrow H_1(M)$$

が定義できる．π_1 での積は曲線をつなぐことであるが，H_1 での和は 1 輪体を形式的にあわせたものである．ゆえに $\alpha*\beta*\alpha^{-1}*\beta^{-1}\in\pi_1(M)$ について

$$h(\alpha*\beta*\alpha^{-1}*\beta^{-1})=h(\alpha)+h(\beta)-h(\alpha)-h(\beta)=0$$

である．すなわち $[\pi_1,\pi_1]\subset\mathrm{Ker}h$ が成り立つ．実はこれは等しいことが証明でき次の定理を得る．厳密な証明は与えないが，事実として知っておいて欲しい事項である．

定理 4.5 (Hurewicz の同型定理)**.** 弧状連結な多様体について，1 次元ホモロジー群は基本群を可換化したものである．

$$H_1(M)\cong\pi_1(M,x_0)/[\pi_1(M,x_0),\pi_1(M,x_0)]$$

特に，M が単連結なら $H_1(M)=0$ である．

4.3 コホモロジー

単体複体 K について

$$C^q(K)=\{f\mid f:C_q(K)\longrightarrow\mathbb{Z},\ \text{準同型}\}$$

を**双対鎖群**(group of cochains) と呼ぶ．線形空間の双対空間の場合と同様な議論により $C^q(K)$ は鎖群 $C_q(K)$ と同型な自由加群である．

$$\delta^q:C^q(K)\longrightarrow C^{q+1}(K)\qquad(\delta^q(f))(c)=f(\partial_{q+1}c)$$

を**双対境界作用素**(coboundary operator) とよぶ．これについて

$$\delta^{q+1}\circ\delta^q=0$$

が成り立つのでホモロジーを定めるときと同様に

$$B^q(K)=\mathrm{Im}\delta^{q-1}\subset Z^q(K)=\mathrm{Ker}\delta^q\subset C^q(K)$$

から q 次**コホモロジー群**(cohomology group) $H^q(K)=Z^q(K)/B^q(K)$ を定めることができる．

コホモロジー群の定義から次の定理が成り立つ．

定理 4.6. コホモロジー群も有限生成アーベル群であり次が成り立つ.

$$H^r(K) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{R_r \text{個}} \oplus \mathbb{Z}_{\theta_{r-1,1}} \oplus \mathbb{Z}_{\theta_{r-1,2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\theta_{r-1,j_{r-1}}}$$

ここで R_r は r 次元ベッチ数であり, $\theta_{r-1,j}$ は $r-1$ 次元ねじれ係数である.

証明. r 次元ベッチ数を R_r, r 次元ベッチ数の個数を j_r とする. このとき, $C_r(K)$ は次のような基底を持つ.

$$a_1^r, a_2^r, \ldots, a_{R_r}^r, \quad b_1^r, b_2^r, \ldots, b_{j_r}^r, \quad c_1^r, c_2^r, \ldots, c_{j_{r-1}}^r, \quad d_1^r, d_2^r, \ldots, d_*^r, \quad e_1^r, e_2^r, \ldots, e_*^r$$

また境界作用素はこの基底に関し

$$\partial a_k^r = \partial b_k^r = \partial d_k^r = 0, \quad \partial c_k^r = \theta_{r-1,k} b_k^{r-1}, \quad \partial e_k^r = d_k^r$$

と表示される. $Z_r(K)$ は $\{a_k^r,\ b_k^r,\ d_k^r\}$ の生成する部分群であり, $B_r(K)$ は $\{\theta_{r,k} b_k^r,\ d_k^r\}$ の生成する部分群なので,

$$H_r(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{\theta_{r,1}} \oplus \mathbb{Z}_{\theta_{r,2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\theta_{r,jr}}$$

である. $C^r(K)$ にこの双対基底をいれて

$$\alpha_1^r, \alpha_2^r, \ldots, \alpha_{R_r}^r, \quad \beta_1^r, \beta_2^r, \ldots, \beta_{j_r}^r, \quad \gamma_1^r, \gamma_2^r, \ldots, \gamma_{j_{r-1}}^r, \quad \zeta_1^r, \zeta_2^r, \ldots, \zeta_*^r, \quad \eta_1^r, \eta_2^r, \ldots, \eta_*^r$$

とすれば, $B_r(K)$ が $\{\theta_{r,k} b_k^r,\ d_k^r\}$ で生成されているので

$$\delta\alpha_k^r = \delta\gamma_k^r = \delta\eta_k^r = 0$$

である. また

$$(\delta\beta_k^r)(c_k^{r+1}) = \beta_k^r(\theta_{r,k} b_k^r) = \theta_{r,k} \quad (\delta\zeta_k^r)(e_k^{r+1}) = \zeta_k^r(d_k^r) = 1$$

より

$$\delta\beta_k^r = \theta_{r,k}\gamma_k^{r+1}, \quad \delta\zeta_k^r = \eta_k^{r+1}$$

を得る. ゆえに $Z^r(K)$ は $\{\alpha_k^r,\ \gamma_k^r,\ \eta_k^r\}$ で生成される部分群, $B^r(K)$ は $\{\theta_{r-1,k}\gamma_k^r,\ \eta_k^{r+1}\}$ で生成される部分群になる. ■

さて, コホモロジー群も図形に対して定義される. 次の定理は重要であるが証明はこの講義のレベルを超える.

定理 4.7 (ポアンカレの双対定理)**.** M を弧状連結で向き付け可能な n 次元閉多様体とする. このとき次が成り立つ.

$$H_r(M) \cong H^{n-r}(M)$$

さらにベッチ数と捩れ係数について以下が成り立つ.

$$R_{n-r} = R_r, \quad \theta_{n-r-1,k} = \theta_{r,k}$$

4.4 ホモロジーと閉曲面の分類

弧状連結でかつコンパクトな 2 次元多様体 M を閉曲面とよぶ. 球面, 2 次元トーラス, 2 次元実射影空間, クラインの壺, 種数 g の曲面などが閉曲面の例である. これらはホモロジー群により完全に分類される. ここでは M が単体複体 K の多面体 $|K|$ として実現されているとしてその証明のあらましを解説する.

1. $|K|$ を平面上に展開し，$2N$ 角形 P を作る．P の一つの辺は K の 1 単体に対応するが，1 単体は二つの 2 単体の辺になっているので，P の別の辺に現れている．
2. P の辺に対応する 1 単体に向きを決め，x_j, $1 \leqq j \leqq N$ と表す．そして，P の辺を反時計回りに読んでいく．この際，x_j が反時計回りの向きになっているときは x_j で，逆の時は x_j^{-1} で表す．この文字の並びを w と表す．例えばトーラスの展開図を正方形で作ったとき $w = x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$ である．
3. P の三角形のすべてに反時計回りに向きを入れることによって，K の 2 単体の全てに向きを入れる．それらの総和を $c \in C_2(K)$ とすれば，∂c は w によって決定できる．w において各辺が x_j と x_j^{-1} からなれば，∂c においてはキャンセルし $\partial c = 0$ になる．c は 2 輪体であり，そのホモロジー類は K の基本ホモロジー類である．すなわち K は向き付け可能である．w が x_j と x_j の組（あるいは x_j^{-1} と x_j^{-1}) の組をもてば $\partial c \neq 0$ なので K は向き付け不可能である．
4. （ここが一番大変）$|K|$ が多様体であることから，$|K|$ の位相を変えないような P の変形によって w を次のいずれかに帰着できる．

$$xx^{-1}, \qquad x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}x_2y_2x_2^{-1}y_2^{-1}\cdots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1} \qquad x_1x_1x_2x_2\cdots x_hx_h$$

5. $w = xx^{-1}$ の場合，$|K|$ は球面 S^2 と同相である．$w = x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}x_2y_2x_2^{-1}y_2^{-1}\cdots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}$ の場合は $|K|$ は種数 g の曲面 Σ_g と同相である．$w = x_1x_1$ のときは 2 次元実射影空間，$w = x_1x_1x_2x_2$ のときはクラインの壺と同相である．$w = x_1x_1x_2x_2\cdots x_hx_h$ に対応する曲面を Γ_h と表すことにする．
6. ホモロジー群については
   - 連結性から $H_0(K) = \mathbb{Z}$.
   - 2 次元であることから $k \geqq 3$ について $H_k(K) = 0$.
   - 向き付け可能性から $H_2(S^2) = H_2(\Sigma_g) = \mathbb{Z}$,　$H_2(\Gamma_h) = 0$.
   - $H_1(S^2) = 0$ は計算済み.
7. 1 次元ホモロジー群については，$|K|$ を P の内部に含まれる閉円板 D と，$|K| - D$ の閉包 E に分けてマイヤー・ビートリス完全系列を利用する．E は $2g$ 個または h 個の円周を 1 点でつなげたブーケとホモトピー同値であり，そのホモロジー群は決定済みである．

$$H_1(\Sigma_g) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{2g\text{ 個}} \qquad H_1(\Gamma_h) = \mathbb{Z}_2 \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{h-1\text{ 個}}$$

以上まとめて次の定理を得る．

定理 4.8. 閉曲面はホモロジー群によって完全に分類される．

同じ問題を 3 次元多様体で考えるとうまくいかない．ホモロジー群が 3 次元球面のホモロジー群と同型でかつ 3 次元球面と同相でない 3 次元多様体が存在するからだ．そこで基本群を条件に入れて，「弧状連結で単連結な 3 次元多様体は 3 次元球面と同相だろう」という予想が 1904 年にポアンカレによって提出された．これを**ポアンカレ予想**(Poincaré conjecture) と呼ぶ．

弧状連結で単連結な 3 次元多様体のホモロジー群が球面のホモロジー群と同型であることは以下の考察から簡単に分かる．まず連結性と単連結から $H_0 = \mathbb{Z}$, $H_1 = 0$ である．さらに定理 4.6 を使えば $H^1 = 0$ である．また，向き付け可能なので $H_3 = \mathbb{Z}$ であり，ポアンカレ双対定理から $H_2 = H^1 = 0$ を得る．

この予想は「S^n とホモトピー同値な位相多様体は S^n と同相だろう」という形で一般次元に拡張され，5 次元以上の場合は 1956 年に S.Smale によって肯定的に解決された．4 次元の場合は 1982 年に M.H.Freedman によって成立することが示された．そして本来の 3 次元の場合のみが残された．

これを解決したのは G.Y.Perelman で 2003 年のことである．彼の証明はリッチ流という微分幾何の手法を使うものであり，その正しさは 2006 年になってようやく検証された．この成果はサイエンス誌の 2006 年度の科

学における世界 10 大ニュースの第 1 位にあげられ，さらに同年度のフィールズ賞[*16]を与えられた．数学における近年最大の出来事である．

レポート課題

次の中から一つ以上選んでレポートにまとめ，8 月末日までに提出すること．

A. プリントの問題の解答をまとめる．
B. 講義に関連する話題を一つ選んでレポートにまとめる．
C. 広く幾何学に関する話題を一つ選んでレポートにまとめる．

なお，レポート作成に当たり参考にした文献等があれば明示すること．Web 上の資料の場合にはホームページのタイトルと URL アドレスを明示すること．講義（他の数学の講義を含む）で扱っていない用語については定義など簡単なコメントをつけること．

レポートは自分が理解できたことをまとめるのが基本である．とても理解できそうにない内容のレポートについては低い評価しか与えられない．いずれにしてもレポートの性質上主観に頼らざるを得ないので，不本意な評価結果がでた場合には申し出るように．

[*16] 数学における世界最高の賞．4 年に一度の国際数学者会議 (ICM) で数人に授与される．S.Smale や M.H.Freedman も受賞しており，ポアンカレ予想が数学界でいかに重要と認識されているかわかるだろう．なお Perelman 本人は受賞を拒否している．Perelman の仕事の解説と，フィールズ賞に受賞拒否の話題は 2007 年の NHK の番組で取り上げられた．