井上尚夫
理学部 2 号館 313 号室　Tel:342–3328
E-mail:hisinoue@kumamoto-u.ac.jp
http://www.math.sci.kumamoto-u.ac.jp/%7Ehisinoue/index-j.html

## 0　はじめに

数は人間の論理的思考のために不可欠なものです．図形や面積などに関する知識についても，古代遺跡に見る高度な建築技術の背景として存在していたはずです．ですから数学の起源は殆ど人類の文化そのものの起源まで遡ります．例えば三平方の定理ですが，今から 4000 年前の古代バビロニアの遺跡からは，ピタゴラス数を記録した粘土板が発見されています．古代バビロニア人たちは三平方の定理を知っていただけではなくそれを満たす整数の組の作り方も知っていたのです．

しかし，数学的考察の記録が残されているのは古代ギリシアからです．プラトンのアカデミーでは「幾何学を知らざる者，ここに入るべからず」と記されていたそうですが，幾何学と算術は当時のもっとも重要な学問でした．その文化的環境から生まれたのがユークリッドの「原論」（紀元前 300 年頃）です．当時の数学的知識を少数の定義・公理から論理によって証明していくという方法は，それ以後の多くの科学者に感銘を与え，人類の最も重要な文化的遺産と受け止められました．例えばニュートンは「プリンキピア」を発表するにあたって，「原論」の形式を踏襲したと伝えられています．

この講義では，幾何学についてのいくつかの歴史的トピックを紹介することによって，数学的思考の方法を学習します．歴史の講義ではなく数学の講義であることをお断りしておきます．

I. 古代バビロニアの粘土板に記された数字の秘密
   数学の歴史は驚くほど古いものですが，断片的な事実しか知られていません．ここでは古代バビロニアの遺跡から出土した粘土板に記された数字について解説します．
II. ユークリッド原論—古典古代における人類最大の文化遺産
   ユークリッドはいくつかの公理・公準から出発して，様々な図形の性質を論理によって導きました．その過程を眺め，ユークリッドの学問への姿勢を学ぶとともにその問題点についても解説します．
III. 球面上の幾何の不思議
   ユークリッドの原論で第 5 公準として採用された平行線の公理は「誰もが認める自明な事実」とは思えません．多くの人がこれを原論の欠陥と捉え，他の公理・公準から証明しようと努力しました．しかしそれはすべて失敗に終わります．講義では失敗の過程を追うのではなく球面幾何を扱うことによって非ユークリッド幾何の準備をします．
IV. 非ユークリッド幾何の発見—原論の疑問の解決
   19 世紀になって，平行線の公理を否定しても矛盾はなく新しい幾何学の体系が得られること

がわかりました．それを非ユークリッド幾何と呼びます．ここでは非ユークリッド幾何のモデルの構成を行うとともに，その性質をユークリッド幾何，球面幾何と対比しながら解説します.

V. 終わりに—空間認識の飛躍と物理学への影響
非ユークリッド幾何の発見は幾何学者の関心を図形から図形の存在する空間へと飛躍させました．リーマンの提唱した新しい幾何学は現代数学の最も基本的な対象になっています．また，アインシュタインは空間は物質によって曲げられるという観点から一般相対性理論を提唱しその記述にリーマンの幾何学を利用しました．数学者の関心が現実の空間理解と結びついたことを紹介します.

## 1　古代バビロニアの粘土板の数字

さて，古代バビロニア時代の粘土板を見てください.

図 1　プリンプトン文書 322

これはノイゲバウアーによって 20 世紀半ばに解読されました．その結果は

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1,59,0,15 | 1,59 | 2,49 | 1 |
| 1,56,56,58,14,50,6,15 | 56,7 | 1,20,25 | 2 |
| 1,55,7,41,15,33,45 | 1,16,41 | 1,50,49 | 3 |
| 1,53,10,29,32,52,16 | 3,31,49 | 5,9,1 | 4 |
| 1,48,54,1,40 | 1,5 | 1,37 | 5 |
| 1,47,6,41,40 | 5,19 | 8,1 | 6 |
| 1,43,11,56,28,26,40 | 38,11 | 59,1 | 7 |
| 1,41,33,45,14,3,45 | 13,19 | 20,49 | 8 |
| 1,38,33,36,36 | 8,1 | 12,49 | 9 |
| 1,35,10,2,28,27,24,26,40 | 1,22,41 | 2,16,1 | 10 |
| 1,33,45 | 45,0 | 1,15,0 | 11 |
| 1,29,21.54,2,15 | 27,59 | 48,49 | 12 |
| 1,27,0,3,45 | 2,41 | 4,49 | 13 |
| 1,25,48,51,35,6,40 | 29,31 | 53,49 | 14 |
| 1,23,13,46,40 | 56 | 1,46 | 15 |

表 1　プリンプトン文書 322(翻訳) 出典 ボイヤー著「数学の歴史」

この第 4 列は単なる順番です．そして, 第 1 列は 60 進法による小数, 第 2 列と第 3 列は 60 進法による整数を表すことが分かりました．例えば第 1 行第 2 列の 1,59 は $1\times60+59=119$ を，次の 2,49 は $2\times60+49=169$ を意味します．最初の 1,59,0,15 は $1+59\times60^{-1}+0\times60^{-2}+15\times60^{-3}=\dfrac{28561}{14400}$ を意味しています．さて

$$119^2+120^2=169^2 \qquad 120^2=14400,\ 169^2=28561$$

を見ればこれらの数字がピタゴラス数（直角三角形の三辺の長さを与える整数の組）であることが分かります．より正確には $a^2+b^2=c^2$ を満たす $a,b,c$ について

$$\frac{c^2}{b^2} \qquad a \qquad c$$

の順に並んでいます．また，$b=120$ なので最初の数は 60 進法では有限小数として表され，近似値ではなく正確な数値になっています.

- 60 進法による整数の表記，小数の表記を学習しよう．また，分数が有限小数で表されるための条件を考察しよう.
- 他の行も第 1 行と同様な関係があることを確認しよう.
- 第 1 行から第 15 行まであるがどういう基準で並べられているのだろうか.
- どうやってこのような数の組を求めたのだろうか.
- この表は何のために作られたのだろうか.

# 2　ユークリッド原論

ユークリッド (Euclid) は紀元前 3 世紀頃，プトレマイオス王朝期のエジプトのアレクサンドリアで活動していた人です．彼は，それまでのギリシャ数学の成果を原論 (Stoicheia) と呼ばれる本にまとめました．その構成は

| | |
|---|---|
| 第 1 巻 | 定義からピタゴラスの定理まで |
| 第 2 巻 | 幾何学的代数 (2 次方程式の解法など) |
| 第 3 巻 | 円論 |
| 第 4 巻 | 内接円，外接円，正多角形 |
| 第 5 巻 | 比の理論 |
| 第 6 巻 | 相似形 |
| 第 7〜9 巻 | 数論 (互除法など) |
| 第 10 巻 | 平方根 |
| 第 11〜12 巻 | 立体幾何 |
| 第 13 巻 | 正多面体 |

の全 13 巻から成り立ちます．このうち第 1 巻の内容を見ていきます.

## 2.1　定義と公理

ユークリッドは議論を始める前提として，まず 23 個の定義，5 個の要請 (公準)，9 個の共通概念 (公理) を述べます.[*1] その後，本文において 48 個の命題が述べられ，一つ一つに何故その命題が成り立つかの説明（証明）がつきます．47 番目がピタゴラスの定理，48 番目がその逆です．以下，少し引用していきますが，より平易な言葉に変えて説明します.

定義１．点は部分のないものである.
定義２．線は幅のない長さである.
定義３．線の端は点である.
定義４．直線とはその上にある点について一様に横たわる線である.
定義５〜７．（面，平面）

これらの定義は決して明確とは言えないでしょう．ただ，ではどう定義すればよいのかと問われればうまく答えられません．しかし，それで困ることはありません．本文の議論ではこれらの定義はまったく使われないからです.

[*1] 数学の歴史 I ギリシャの数学（弥永昌吉他著）による.

定義８．平面角とは平面上にあって互いに交わりかつ一直線をなすことのない二つの線相互のかたむきである．
定義９．角をはさむ線が直線である時，その角は直線角と呼ばれる．
定義 10. 直線が直線の上に立てられて接角を互いに等しくするとき，等しい角の双方は直角であり，上に立つ直線はその下の直線に対して垂線と呼ばれる．
定義 11～12.（鋭角，鈍角）

角についての定義ですが，曲線のなす角を定義してから直線角を定めているのが高校までの幾何との違いでしょう．分かりづらい部分もありますがおおむね理解できる定義です．

定義 13. 境界はあるものの端である．
定義 14. 図形は一つまたはいくつかの境界で囲まれたものである．

図形を定義しようとしているのでしょうが，これでは図形は「あるもの」のことになってしまいうまく定義されていません．実際にはユークリッドは円（円弧）と直線（線分）しか考えていないのでそれらで囲まれた領域としておけば良いでしょう．ただ，不規則な曲線で囲まれた図形というのもあるわけですから，なんとか定義したいという気持ちはわかります．

定義 15. 円とは一つの線で囲まれた平面図形であって，その中にある一点があって，その点からその線までの線分がすべて互いに等しいようなものである．
定義 16. この点は円の中心と呼ばれる．
定義 17～18.（直径、半円）
定義 19. 直線図形とは線分に囲まれた図形であり，三辺形とは三つの，四辺形とは四つの，多辺形とは四つより多くの線分で囲まれた図形である．
定義 20.（正三角形，二等辺三角形，不等辺三角形）
定義 21.（直角三角形，鋭角三角形，鈍角三角形）
定義 22.（正方形，長方形，ひし形）長斜方形とは対辺と対角が等しいが，等辺でなく角が直角でないものである．

ユークリッドの扱う図形が厳密な形で定義されています．最後の長斜方形とはようするに平行四辺形のことですが，平行の定義が済んでいないのでこの形で記述したのでしょう．平行の定義は交わらないという性質で記述されています．

定義 23. 同じ平面上にあって，どちらへどこまでも延ばしても，どちらでも交わらない直線は平行である．

以上みてきたようにユークリッドの定義については不十分な点も多々見受けられます．しかし，本文を読めばそれらはまったく問題にならないことが分かります．証明で用いられるのは角，図形，

平行の定義でありそれらは厳密に定義されているからです．現代の数学の立場では点や線は無定義概念として扱われます．

次に公理・公準をみてみましょう．

公理１．同じ物に等しいいくつかのものは互いにも等しい．
公理２．等しいものに等しいものを加えれば全体も等しい．
公理３．等しいものから等しいものを取り去れば残りは等しい．
公理４．等しいものに等しくないものを加えれば全体は等しくない．
公理５．同じものの２倍は互いに等しい．
公理６．同じものの半分は互いに等しい．
公理７．重なり合うものは互いに等しい．
公理８．全体は部分より大きい．
公理９．二つの線分は面積を囲まない．
公準１．任意の二つの点を線分で結ぶことができる．
公準２．線分は延長できる．
公準３．任意の点を中心とし任意の長さを半径とする円がかける．
公準４．すべての直角は等しい．
公準５．一つの直線が二つの直線と交わるとき，その一方の側にできる二つの角をあわせて 2 直角よりも小さくなれば，二つの直線はその側で交わる．

ユークリッドはこれらの主張を議論の前提として採用します．公準は図形的な公理，公理はより普遍的なものと区別しているようですが，現代の数学ではどちらも公理で構いません．ただし，公理９は異なる直線は 2 点で交わることは無いということを述べており，公理とするには少し異質のような気がします．

最後の公準５は，証明なしに受け入れるには少し複雑です．多くの人が公準５を他の公理・公準から証明しようと試みました．この経緯については 2.3 節で解説します．

## 2.2　本文の議論の特徴

本文は特徴的なもののみ解説しましょう．

**第１命題**　「与えられた線分の上に正三角形を作る．」

コンパスと定規を使えば簡単に作図できることは誰でも知っているでしょう．この簡単な事実についてユークリッドは定義・公準・公理を使って巧みに証明します．しかし，その証明では二つの円が交わることを何の理由もなしに使っています．皆さんもそんなの図を描けば明らかじゃないかと思われるかもしれませんが，ユークリッドはそういうものでも公準として明示しているのですから不十分な記述といわざるを得ません．

**第２命題**　「与えられた点から与えられた線分に等しい長さの線分を引く．」

第３公準のことではないかと思うかもしれません．しかし，ユークリッドは与えられた長さを別の場所に移すことを公準としては認めていません．第１命題を巧みに利用して実行します．この証明からは公準はできる限り弱い形にしたいというユークリッドの姿勢が感じられます．

**第４命題**　「２辺挟角の合同定理」

ここで，ユークリッドは図形の移動を利用して証明します．第２命題で長さが移動できることを示したので図形の移動もできると考えたのかもしれませんが，この二つにはギャップがあります．ユークリッドの体系の不完全な部分と言えるでしょう．図形を形を変えずに移動することを剛体運動と呼びますが，剛体運動の可能性はユークリッド幾何を特徴づける重要な性質です．

**第８命題**　「３辺のそれぞれ等しい三角形は合同」

**第 10 命題**　「与えられた線分をニ等分すること」

**第 15 命題**　「対頂角は等しい」

**第 16 命題**　「三角形の外角は，内対角よりも大きい」

第５公準を使えば，外角は内対角の和に等しいことが証明できます．ユークリッドは第５公準を使わずにこの事実を証明します．

**第 27 命題**　「錯角が等しければ平行」平行ではないとして第 16 命題を使えば矛盾が生じます．

**第 29 命題**　「平行ならば錯角は等しい」

この第 29 命題で第５公準がはじめて使われます．その逆の第 27 命題は第５公準を使わずに証明しています．

**第 41 命題**　「平行四辺形 ABCD の面積は BC を底辺とし，直線 AD（の延長）上に頂点 E を持つ三角形 BCE の面積の 2 倍に等しい」

第 35 命題から第 45 命題までは平行線と三角形・四角形の面積に関する命題がならびます．

**第 47 命題**　「ピタゴラスの定理」

平行線を巧みに利用して第 41 命題からピタゴラスの定理を導きます．

**第 48 命題**　「ピタゴラスの定理の逆」

第 1 巻の最後の命題です．辺の長さの関係から直角三角形であることを導きます．

この節の始めに述べたように，ユークリッド原論は当時の数学的知識を体系的にまとめたものです．他の文明における数学的記述が「問題と解法」という観点から書かれていたのに対し，「定義・公理から定理へ」という形式は現代の学術書にも通じるものです．まさに，世界最古の学術書といえます．

しかし，その内容には問題点もいくつかあります．一部の定義に見られる曖昧さ，明示されない議論の前提（公理）の存在，そして第 5 公準（平行線の公理）です．これらの問題点が解決するのは 19 世紀に入ってからです．問題点の存在は原論の意義を低めるものではありません．

# 3　球面幾何

ユークリッドが原論によって幾何学の体系化を行ったことにより,「第 5 公準を他の公理から証明せよ」という問題が浮かび上がりました. 2000 年間にわたる試行錯誤の上, ついにそのようなことは証明できないという事実が明らかになりました. 非ユークリッド幾何（第 5 公準を満たさない幾何）が誕生したのです. この節では, 非ユークリッド幾何の紹介の準備として, 球面上の幾何を扱います.

球面上の 2 点を結ぶ最短線は大円の弧[*2]です. 大円を直線の替わりとして, 球面上の幾何学が展開できます.

## 3.1　ユークリッドの公準の修正

ユークリッドの幾何を半径 1 [*3]の球面上で展開してみましょう. まず, 定義は変更しません. ただし, どの直線 (大円) も 2 点で交わるので, 平行線というものは存在しなくなります. 円は半径 $\pi$ 未満で考えます. 三角形についても辺の長さは $\pi$ よりも小さいとしておきましょう.

9 つの公理のうち, 最後のものは,

長さ $\pi$ 未満の二つの線分は領域を囲まない.

というような修正が必要ですが, 他はそのままで問題ありません. 公準についても最初の 4 つは半径が $\pi$ 未満ということに留意すればそのままでよいでしょう. 公準 5 は平行線がないので削除します. さて, このような前提で命題 1 の証明を考えてみます. すると得られる事実は

長さ $2\pi/3$ 以下の線分の上に正三角形を作図する.

となります. 長さの条件が入るのは, 線分の両端を中心に描かれる二つの円が交わらせるためです.

広い意味では, 球面上の幾何学も非ユークリッド幾何学の例です. しかし, 他の公理や公準も成り立たないのですから, 第 5 公準が成り立たないのは当然で, その意味から非ユークリッド幾何学とは言いません. 一方, 第 4 命題は剛体運動の可能性を反映しているので, 曲がり具合（曲率）の一定な球面上でも成立します. 証明は原論の方法とまったく同じです.

**定理**　球面三角形 $\triangle$ABC と $\triangle$DEF について

$$\mathrm{AB} = \mathrm{DE}, \quad \mathrm{AC} = \mathrm{DF}, \quad \angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{D} \Longrightarrow \triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{DEF}$$

[*2] この事実は, 飛行機の航路を決める際に利用されています. 日本からアメリカ東海岸に行く時に, アラスカ上空を通りますが, それが最短距離であることを地球儀で確認してみてください.

[*3] 地球上の幾何をやりたいなら長さの単位を地球の半径として定めれば良いのです.

ラグビーボールのような曲率の一定でない曲面上でも，曲面上の最短線を直線として幾何の議論が展開できます．しかし，剛体運動は自由には行なえないので第 4 命題も成立しません．

## 3.2　球面三角形の性質

球面三角形には平面の場合と異なる多くの性質があります．その表示には一周を 360 度とするのではなく，$2\pi$ とする角度（ラジアン）を用います．また，球面は座標空間における原点を中心とし半径 1 の球

$$S^2 = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1\}$$

とします．ラジアンを用いていることから球面上の 2 点 $\vec{x}, \vec{y}$ の距離 $d$ は二つのベクトルのなす角になるので $\cos d = \vec{x} \cdot \vec{y}$ を満たします．まず，三角形の面積について次が成り立ちます．

**定理**　球面三角形の三つの内角を $\alpha, \beta, \gamma$ とします．その面積は次で与えられます．

$$(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

この定理から，三角形の内角の和は $\pi$（180 度）より大きくなることが分かります．また，3 つの

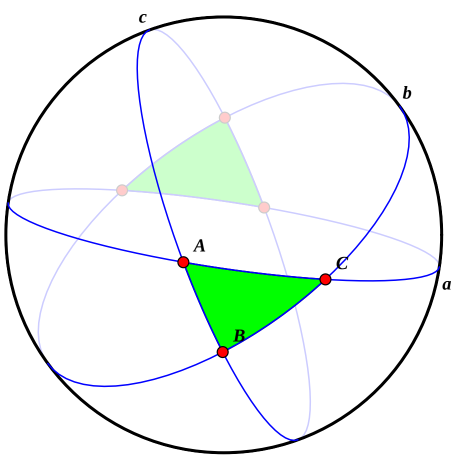


図 2　球面三角形

角度がすべて直角の三角形は存在し，面積は $\pi/2$（球面全体の 8 分の 1 の領域）になります．

## 3.3　球面三角法

原論第 1 巻の内容と三角比を組み合わせれば，ユークリッド幾何の余弦定理と正弦定理が証明できます．さて，球面幾何においても，余弦定理と正弦定理に対応する公式を与えることができます．これを球面三角法と呼びます．

**定理**　球面三角形の三つの内角を $\alpha,\beta,\gamma$ それぞれの角に向かい合う辺の長さを $a,b,c$ とします．このとき次が成り立ちます．

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$
$$\cos a = \cos b\cos c + \cos\alpha\sin b\sin c$$
$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \cos a\sin\beta\sin\gamma$$

最初の式は平面幾何の正弦定理に相当します．二番目の式は二辺の長さとその挟む角の大きさから対辺の長さを表しているので余弦定理に相当します．三番目の式は二つの角の大きさとその挟む辺の長さから対角の大きさを決める式ですが，ユークリッド幾何では内角の和が 180 度なので辺の長さによらず対角は決まってしまいます．またこの式から 3 つの角がわかれば辺の長さがすべて決まります．対応する 3 つの角がそれぞれ等しい三角形は互いに合同なのです．

次に球面上の円の面積，円周の長さを考えてみましょう．半径 $r$ の円周の長さを $\ell(r)$，円の面積を $A(r)$ とすると

$$\ell(r) = 2\pi\sin r, \quad A(r) = 2\pi(1-\cos r), \quad 0 \leqq r \leqq \pi$$

となります．$r$ が 1 よりも非常に小さいときは，これらの値は平面上の円の場合とほぼ一致します．

**問題**　地球上で半径 100Km の円周の長さは $200\pi$ Km とどれほど異なるか.

## 3.4　球面の平面への投影

地図とは球面を平面上に表す方法と言えます．もちろん形を一定の縮尺のもとに正確に写し取る地図は存在しません[*4]．ここでは立体射影をもとに一つの地図の例を紹介します．

球面を $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ とし，南極 $\vec{p} = (0,0,-1)$ を とります．球面上の点 $\vec{x}$ に対して，$\vec{x}$ と $\vec{p}$ を結ぶ直線が $xy$ 平面と交わる点を $F(\vec{x})$ と表しましょう．これを球面の立体射影といいます．これによって地球の地図が作れます．この地図には次の著しい性質があります．

- 球面上の円は，地図上では円または直線になる．
- 二つの曲線の交わる角度は球面上でも地図上でも等しい．

もう一つの方法は，中心から北極での接平面 $z=1$ に投影することです．この方法では，北半球しか描けませんが，2 点の最短線は必ず線分になります．これを中心射影といいます．

[*4] この事実の証明はガウスによって与えられましたが，この講義のレベルを超えるので紹介はできません．

# 4　非ユークリッド幾何学

## 4.1　第 5 公準の証明の努力

ユークリッドが幾何学を体系化して以来，多くの数学者が第 5 公準を証明しようと努力してきました．その方法には基本的に 3 通りに分けられます．一つは，他の公理・公準から直接証明することです．しかし，それらはすべて平行線の公理と等価な仮定を暗黙のうちに使っていました．例えば Wallis(1616–1703) は，与えられた三角形に相似な三角形があるとして第 5 公準を証明しました．任意の点を中心に任意の半径で円がかけるのだからこの仮定は自然なものと感じたようですが，この仮定は第 5 公準を仮定することと等価であることが分かっています．二つ目は平行線の定義を修正することです．例えば平行を等間隔な直線というように定義する考えもありました．しかし，これでは平行線の存在すら証明できません．三つ目の最も重要な方法は背理法です．第 5 公準以外のすべての仮定を認めた上，第 5 公準が成り立っていないとするとどんな結論が得られるのか，考えたのです．そしてそこから矛盾が生じれば，第 5 公準が証明できたことになります．Saccheri(1667–1733) は，$\angle A = \angle B = 90^\circ$，$AD = BC$ を満たす四角形 ABCD を考え $\angle C = \angle D < 90^\circ$ として矛盾がでないかを考察しました．この立場をさらに進めたのが Lambert(1728–1777) です．彼は三角形の内角の和は 180 度より小さく，180 度との差は面積に比例するなどの不思議な事実を得ました．そして球面上の幾何と対比して半径が虚数の球面上の幾何だと考えました．非ユークリッド幾何の目前まで来ていたわけですが，これは論理的に矛盾だと結論付けてしまいました．

しかし，それは直感と矛盾するというだけで，論理が矛盾したのではなかったのです．そして，19 世紀前半に Lobachevsky(1793–1856) と Bolyai(1802–1860) によって非ユークリッド幾何のモデルが作られ，第 5 公準を否定しても論理的な矛盾は生じないことが証明されたのです．

## 4.2　非ユークリッド幾何のモデル

非ユークリッド幾何のモデルとしては，剛性運動の可能性から曲がり具合が一定であることが要請されます．一方その曲がり方は球面と正反対でなくてはなりません．半径 $r$ の円周の長さが $2\pi r$ よりも大きくなるようにします．そのような曲面の例として擬球面があります．

しかし，擬球面では 2 点を結ぶ直線がただ一本とは言えません．そこで，擬球面を切り開き重なり合わないようにつないでいくことを考えてみます．しかし，その方法もうまくいかないことが知られています．

ここで，発想の転換を行います．曲面の存在する空間自体を変えてやるのです．通常の内積を持つ空間（座標空間）をユークリッド空間といい $\mathbb{E}^3$ で表します．球面は $\mathbb{E}^3$ 内の大きさ 1 の点全体の集合になります．同じ座標空間で内積をローレンツ計量

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

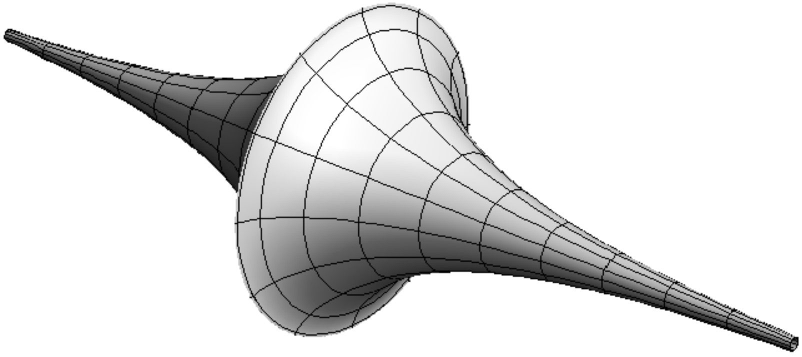

図 3　擬球面・負定曲率曲面

に変えたものをローレンツ空間と呼び $\mathbb{L}^3$ で表します[*5]．$\mathbb{L}^3$ 内の大きさ $-1$ の点全体の集合を考えましょう．これは，双曲線の回転面になっています．この $x_1 \geqq 0$ の部分を双曲面と呼び $H^2$ で表します．これが，非ユークリッド幾何のモデルになるのです．

$$H^2 = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) | \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = -{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = -1,\ x_1 > 0\}$$

## 4.3　双曲線関数

ユークリッド平面の曲線 $x^2 + y^2 = 1$（原点を中心とする半径 1 の円周）上を速度 1 で運動する点の座標は $(\cos t,\ \sin t)$ で表されます．ローレンツ平面（内積を $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = -x_1y_1 + x_2y_2$ で与えた平面）の曲線 $-x^2 + y^2 = -1$ 上を速度 1 で運動する点の座標を $(\cosh t,\ \sinh t)$ で表します．これを双曲線関数と呼びます．双曲線関数[*6]について以下の等式が成り立ちます．

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \quad (\cosh t)' = \sinh t, \quad (\sinh t)' = \cosh t$$

## 4.4　ローレンツ群

ここでは線形代数の知識を使って議論をします．3 次正方行列 $A$ で

$$\langle A\vec{x}, A\vec{y} \rangle_L = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L, \quad a_{11} > 0$$

[*5] 相対性理論では空間 3 次元と時間 1 次元を統一して考察し，4 次元の時空として扱います．ここでの内積は時間方向を負で捉えるので 4 次元のローレンツ空間（ミンコフスキー空間）になっています．

[*6] 双曲線関数は指数関数を用いて表示することができます．この表示を使って上の性質を確認してみてください．

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

を満たすものを考えます．基本的な例として

$$(1)\begin{pmatrix}\cosh t & \sinh t & 0\\ \sinh t & \cosh t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad (2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & -\sin t\\ 0 & \sin t & \cos t\end{pmatrix},\qquad (3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

があります．これらをローレンツ変換と呼び，ローレンツ変換全体をローレンツ群と呼びます．定義から $\vec{a}$ が $H^2$ の点なら $A\vec{a}$ も $H^2$ の点になります．すなわちローレンツ変換は双曲面 $H^2$ の運動を引き起こします．

## 4.5 双曲面の 2 点の距離

ローレンツ計量でベクトルの大きさを測ろうとすると 0 ベクトルではないのに 0 になってしまうことがあります．しかし，双曲面の接ベクトルではその心配はありません．

**定理**　$\vec{a}$ を双曲面上の点とし，$\vec{a}$ における $H^2$ の接ベクトルを $\vec{v}$ とする．

1. $\langle \vec{a}, \vec{v}\rangle_L = 0$ 逆にこれを満たす $\vec{v}$ は $H^2$ に接する．
2. $\vec{v} \neq \vec{0}$ ならば $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle_L > 0$.

**証明**　双曲面は下に凸なので直線 $\{\vec{a} + t\vec{v} | t$ は実数 $\}$ は双曲面の下側にあります．ゆえに

$$\langle \vec{a} + t\vec{v}, \vec{a} + t\vec{v}\rangle_L = \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle_L + 2t\langle \vec{a}, \vec{v}\rangle_L + t^2\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle_L$$

は $t = 0$ で極小値 $-1$ をとります．この 2 次不等式から結果を得ます．（証明終）

これによって双曲面上の曲線について接ベクトルの大きさが定まり，その積分によって曲線の長さが求められます．ゆえにローレンツ変換は双曲面 $H^2$ の合同変換です．さて，2 点 P, Q の距離は双曲線関数を用いて

$$\cosh d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = -\left\langle \overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right\rangle_L$$

と表されます．証明は次のような議論で行います．

1. $x_1$ 軸を中心とする回転（(2) のローレンツ変換）により $P$ を本初子午線（ $x_1x_2$ 平面と双曲面の切り口の $x_2 > 0$ の部分）上に移動させます．
2. 本初子午線上の運動（(1) のローレンツ変換）により $P$ を北極 $(1, 0, 0)$ に移します．
3. さらに $x_1$ 軸を中心とする回転によって $Q$ を本初子午線上に移動させます．
4. $P$ と $Q$ の距離を $d$ とすれば $Q$ の座標は $(\cosh d, \sinh d, 0)$ です．
5. ローレンツ変換はローレンツ内積と距離を変えないので結果を得ます．

さて，上記の議論を任意の三角形に対して行えば，頂点を北極と本初子午線上に移動させることができます．さらに必要なら $x_1x_2$ 平面に関する対称移動（(3) のローレンツ変換）を使って，第 3 の頂点を $x_3 > 0$ の部分にもってこれます．双曲面では三角形は形を変えることなく任意の位置に移動させることができます．

## 4.6　双曲幾何の公式

双曲面上では以下の公式が成り立ちます．これはまさしく半径 $i$ の球面における公式です．

- 内角が $\alpha, \beta, \gamma$ の三角形の面積は $\pi - \alpha - \beta - \gamma$
- 双曲三角形の 3 つの辺の長さをそれぞれ $a, b, c$ それに向かい合う辺の長さを $\alpha, \beta, \gamma$ とすると以下の等式が成り立ちます．

$$\frac{\sin\alpha}{\sinh a} = \frac{\sin\beta}{\sinh b} = \frac{\sin\gamma}{\sinh c}$$
$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \cos\alpha \sinh b \sinh c$$
$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \cosh a \sin\beta \sin\gamma$$

- 双曲面での半径 $r$ の円周の長さは $2\pi \sinh r$ です．

## 4.7　非ユークリッド世界の地図

双曲面上の幾何が非ユークリッド幾何であることを確認するために，双曲面の地図を作ってみましょう．方法は球面のときと同じように極射影（または中心射影）の手法を使います．すなわち，双曲面上の点と $\vec{p} = (-1, 0, 0)$（または $\vec{0} = (0, 0, 0)$ ）を結ぶ直線が $yz$ 平面（または平面 $x = 1$ ）と交わる点を地図上の点とするのです．双曲面の地図は半径 1 の円内に表されます．円周上の点は双曲面上の点とは対応せず無限遠点として理解されます．

中心射影の地図では最短線はすべて線分として表されます．2 点を結ぶ直線がただ一本であること，一つの点を通りある直線と交わらない直線（この交わらないということがユークリッドの直線の定義でした）が無数に引けることが簡単に理解できます．

極射影の地図では次の性質が示されます．

- 双曲面上の直線は，地図上では直径または境界と直交する半円になる．
- 二つの曲線の交わる角度は双曲面上でも地図上でも等しい．

これをポアンカレ円板と呼んでいます．次の Escher の絵は，ポアンカレ円板の立場からはすべて合同な図形なのです．

講義資料では M. C. Escher の Circle Limit IV の絵を使いましたが，Web の資料では割愛します．

この絵を見れば，この双曲空間上の幾何学が第 5 公準以外のユークリッドの議論の仮定をすべて満たすことが分かります．第 5 公準は他の公理・公準からは決して導き出せない主張なのです．

## 5　おわりに ユークリッドからの飛躍

ユークリッドの幾何の公準は図形の性質というより，図形の存在する空間の性質だったのです．特に，第 4 命題の証明で使った運動の可能性は，空間が定曲率だということに他なりません．これを一般にし，様々に曲がった空間というものを考えたのがリーマンであり，その空間での幾何学をリーマン幾何学と呼びます．

リーマン幾何学は数学者の虚構なのでしょうか．いえ，決してそうではありません．アインシュタインは自ら発表した特殊相対性理論について，それをさらに発展させ，質量が空間を歪めるという認識にいたりました．彼は，リーマン幾何学の考えを聞いて，それこそが自分の相対性理論を記述する手法であると確信しました．そして，生まれたのが一般相対性理論です．数学者の純粋に本質を見極めようとする努力が，現実の宇宙の認識に大いに役立ったのです．

## 6　問題集

まず，講義内容に関する問題の例を挙げてみます．

問題 1.　プリンプトン文書 322 に記述されている数について，その特徴を述べよ．またそのような数の組を作るにはどうすれば良いか述べよ．

問題 2.　ユークリッド第 1 命題の証明に定義・公理・公準がどの様に使われている述べよ．

問題 3.　ユークリッド第 4 命題（二辺とその挟む角による合同定理）の証明において，空間のどのような性質が利用されているか．また，この命題は球面幾何では成立するか．

問題 4.　ユークリッドのアイデアに従って，三平方の定理とその逆を証明せよ．

問題 5.　球面三角形の面積をその内角の和から導く公式を証明せよ．

問題 6.　東京とニューヨークの間の距離を，地球の半径，二地点の緯度・経度から求めよ．

問題 7.　地球を半径 $20000/\pi$Km の球とするとき，1 辺 100Km の直角二等辺三角形の斜辺の長さは，平坦な場合の長さ $100\sqrt{2}$Km とどの程度異なるか調べよ．

問題 8.　双曲面において，直線は原点を通る平面と双曲面の切り口になることを示せ．また，円は平面と双曲面の切り口になることを示せ．

問題 9.　極射影の地図において，直線は単位円に直交する円弧であることを示せ．また，2 点を結ぶ直線の作図法を考察せよ．

この他にもいろいろな問題が考えられます．数学では問題を解くことよりも問題を考えるほうが重要だということが良くあります．

評価は，レポートと出席状況によって行います．テーマは上記の問題の解答（一つでもかまいません），独自問題の設定とその解答，講義の感想などどれでも構いません．複数のレポートも歓迎します．

**締切：8 月 31 日（水）　　提出場所：井上研究室**

評価の基準については 9 月 5 日以降にホームページ（http://www.math.sci.kumamoto-u.ac.jp/%7Ehisinoue/index-j.html）に掲載します．成績発表は 9 月下旬に行われますが，自分の成績に疑問のある方は，10 月 10 日までに申し出て下さい．