1　集合と論理

1.1　基本事項

- 論理記号 ∀（全称記号）∃（存在記号）による命題の表示と否定命題の作り方

  例題　2 変数関数関数 $f(x,y)$ に対する以下の命題の意味の違いを吟味せよ．また，それぞれの否定を記述せよ．

$$\begin{array}{rr} \forall x,\ \exists y,\ \text{s.t. } f(x,y) > 0 & \exists x \text{ s.t. } \forall y,\ f(x,y) > 0 \\ \exists y \text{ s.t. } \forall x,\ f(x,y) > 0 & \forall y,\ \exists x,\ \text{s.t. } f(x,y) > 0 \\ \forall x,\ \forall y,\ f(x,y) > 0 & \exists x,\ \exists y,\ \text{s.t. } f(x,y) > 0 \end{array}$$

- 部分集合（$A \subset B$），共通部分（$A \cap B,\ \cap_\alpha A_\alpha$），合併（$A \cup B,\ \cup_\alpha A_\alpha$），補集合（$A^c$），差集合（$A - B = A \cap B^c$），直積集合（$A \times B$）
- de Morgan の公式（無限個の集合の合併，共通部分についても成立）

$$\left(\bigcap_{\alpha\in A} U_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha^c \quad \left(\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in A} U_\alpha^c$$

  この式で A は添え字の集合としての意味しかない．これを省略し $\cap_\alpha U_\alpha$ と略記する．

1.2　命題問題等

1. 集合演算の分配法則

$$A \cap (\cup_\alpha B_\alpha) = \cup_\alpha (A \cap B_\alpha), \quad A \cup (\cap_\alpha B_\alpha) = \cap_\alpha (A \cup B_\alpha)$$

2. 次の包含関係を示せ．

$$\cap_\alpha (\cup_\beta A_{\alpha\beta}) \supset \cup_\beta (\cap_\alpha A_{\alpha\beta})$$

   特に，$A_{\alpha\beta} = (\alpha - \beta, \infty)$ として考察してみよ．

3. 次の集合を求めよ[*1]．

$$\cap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n), \quad \cap_{n=1}^{\infty} [0, 1 + 1/n)$$

4. 次の等式を示せ．

$$A \times (\cup_\alpha B_\alpha) = \cup_\alpha (A \times B_\alpha), \quad (\cup_\alpha A_\alpha) \times (\cup_\alpha B_\alpha) \supset \cup_\alpha (A_\alpha \times B_\alpha), \quad (\cap_\alpha A_\alpha) \times (\cap_\alpha B_\alpha) = \cap_\alpha (A_\alpha \times B_\alpha)$$

5. 前問の二つ目の式で一般には等号にならないことを示せ．
6. 次を示せ．

$$A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$$

集合演算をベン図などで視覚的に理解することは重要である．しかし，無限個の合併のようなものを扱うためにはそれだけでは不十分であり，論理に基づく議論が不可欠である．

[*1] 厳密な証明には次の事実を使う．

$$\forall x > 0,\ \exists n \in \boldsymbol{N},\ \text{s.t.},\ x > 1/n > 0 \quad \text{（アルキメデスの公理）}$$

2　写像

2.1　基本事項

- 写像とは何か，写像の表し方
  集合の対応 $f : X \longrightarrow Y$ ，要素の対応 $f : X \ni a \longmapsto b \in Y$
- 全射，単射，全単射
- 合成写像，定値写像，恒等写像，逆写像，制限
- 集合の像，集合の逆像
  要注意：　 $f^{-1}(A)$ は逆写像が存在しなくても定義される．

2.2　命題問題等

1. 次の集合を求めよ．
   (a) $f(x) = x^2,\quad f([-1, 2]),\ f(\boldsymbol{R}),\ f^{-1}([1, 4]),\ f^{-1}([-5, 1)),\ f^{-1}(\{-1\})$
   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2,\quad f([1, 3] \times [1, 3]),\ f^{-1}((-\infty, 4)),\ f^{-1}(\{1\})$
2. 二つの写像 $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$ について
   (a) $g \circ f$ が全射ならば g は全射になる．この逆は成り立たない．
   (b) $g \circ f$ が単射ならば f は単射になる．この逆は成り立たない．
   (c) f , g がともに全射 (単射) ならば $g \circ f$ も全射 (単射) である．
   (d) $A \subset X$ について $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.
   (e) $C \subset Z$ について $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.
   (f) $A \subset X$ について $f^{-1}(f(A)) \supset A$.
   (g) $B \subset Y$ について $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.

3. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ について次を示せ．ただし $\{y\}$ は要素 1 個の集合である．
   (a) $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \Longleftrightarrow y \in f(X)$
   (b) $\forall y \in Y,\ f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \Longleftrightarrow f : X \longrightarrow Y$ は全射
   (c) $\forall y \in Y,\ f^{-1}(\{y\})$ の要素は 0 個または 1 個 $\Longleftrightarrow f : X \longrightarrow Y$ は単射
   (d) $f : X \longrightarrow Y$ は逆写像を持つ $\Longleftrightarrow f : X \longrightarrow Y$ は全単射

4. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ について，$\{U_\alpha\}$ を X の部分集合の属，$\{V_\beta\}$ を Y の部分集合の属とする．このとき
$$f^{-1}(\cup_\beta V_\beta) = \cup_\beta f^{-1}(V_\beta),\quad f^{-1}(\cap_\beta V_\beta) = \cap_\beta f^{-1}(V_\beta)$$
$$f(\cup_\alpha U_\alpha) = \cup_\alpha f(U_\alpha),\quad f(\cap_\alpha U_\alpha) \subset \cap_\alpha f(U_\alpha)$$

5. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ について，$U \subset X,\ V \subset Y$ とする．このとき
$$f(U^c) \supset f(U)^c \cap f(X),\quad (f^{-1}(V))^c = f^{-1}(V^c)$$

6. 写像 $f : X \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ について，$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ とおく．また $U \subset X$, $V_j \subset Y_j$ とする．このとき
$$f(U) \subset f_1(U) \times f_2(U),\quad f^{-1}(V_1 \times V_2) = f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2)$$

3 実数の性質

3.1 基本事項

- 代数構造 (四則演算)，順序構造 (大小関係)，距離構造 (距離)
- 上に (下に) 有界，有界，上界 (下界)，上限 (下限) $\sup A$
- 実数の連続性公理「上に有界な集合には上限が存在する.」
- 数列の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists N \in \boldsymbol{N}$ s.t. $n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$
- 定理「単調増加で上に有界な数列は (上限に) 収束する.」
- 定理（区間縮小法）「閉区間の縮小列の共通部分は空集合ではない.」
- Cauchy 列（基本列）と実数の完備性「Cauchy 列は収束する.」
- 可算無限と非可算無限
- 有理数全体の集合は可算集合であり，実数全体の集合は非可算無限である.

3.2 命題問題等

1. (上限の特徴づけ) $\alpha = \sup A$ であることと，次の二つが成り立つこととは同値である.

   (1) $\forall a \in A,\ a \leq \alpha,$ (2) $\forall\epsilon > 0,\ \exists a \in A,$ s.t. $\alpha - \epsilon < a.$

2. $A, B \subset \boldsymbol{R}$ について $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$, $-A = \{-a \mid a \in A\}$ と定める．このとき次を示せ.

   (1) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B,$ (2) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B,$

   (3) $\sup(-A) = -\inf A,$ (4) $\inf(-A) = -\sup A.$

3. (Archimedes) 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ は上に有界でない.

4. 数列の有界性の定義，収束する数列は有界である.

5. (Bolzano-Weierstrass) 有界な数列は収束する部分列を持つ.

6. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束する部分列をもつための必要十分条件は次が成り立つことである.

   $\forall\epsilon > 0$ について $|a_n - \alpha| < \epsilon$ となる n は無限個存在する.

   この α を数列 $\{a_n\}$ の集積点という.

7. 二つの可算集合の直積は可算集合になることを示せ.

8. 可算集合の部分集合は有限集合または可算集合であることを示せ．(高々可算)

9. (上極限) 上に有界な数列 $\{a_n\}$ について，$\alpha_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ とおく．数列 $\{\alpha_n\}$ は単調減少であることを示せ．この極限 ($-\infty$ の場合を含めて) を数列 $\{a_n\}$ の上極限という.

4　同値関係

4.1　基本事項

- 同値関係　反射律・対称律・推移律
- 同値類 $[a]$ と商集合 $X/\sim$，代表元，射影，類別（直和分割）
- 同値関係の例

4.2　命題問題等

1. X を集合，$\sim$ をその同値関係，$[a]$ を a の属する同値類とする．
   (a) $a \in [a]$ 特に $[a] \neq \emptyset$
   (b) $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Longleftrightarrow [a] = [b]$
   (c) 同値関係により X は同値類たちの互いに交わらない合併集合（直和分割）として表される．これを同値関係 $\sim$ の定める類別と呼ぶ.
2. 同値関係及び商集合の例
   (a) $X = \boldsymbol{Z}$,　$a \sim b \Longleftrightarrow (a-b)/5 \in \boldsymbol{Z}$ （5 を法とする剰余系）
   (b) X 線形空間 $Y \subset X$ 部分空間,　$a \sim b \Longleftrightarrow a - b \in Y$ （商空間）
   (c) $X = \boldsymbol{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$,　$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y},\ \alpha \in \boldsymbol{R}$ （射影空間）
3. A を $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合とする．$\boldsymbol{R}^2$ の関係
$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in A$$
   が同値関係であるための A の条件を求めよ．また，その条件を満たす A の例をあげよ.
4. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ について
$$x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$
   は同値関係になる．また，この同値関係に関して，次は全単射になる.
$$\hat{f} : X/\sim \longrightarrow f(X), \quad \hat{f}([x]) = f(x).$$
5. 集合 X の直和分割は同値関係を定める．すなわち
$$X = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \quad U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = \emptyset \ (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$
   とするとき
$$x \sim y \Longleftrightarrow x, y \text{ が同一の } U_\lambda \text{ に属する}$$
   は同値関係になる．また，この同値類は U_λ に他ならない.
6. 二つの集合 X, Y と X の部分集合 A から Y への写像 $f : A \longrightarrow Y$ について $X.Y$ の直和集合 $Z = X \sqcup Y$ における関係
$$z \sim w \Longleftrightarrow z = w \text{ または } z \in A, f(z) = w \text{ または } w \in A, f(w) = z \text{ または } z, w \in A, f(z) = f(w)$$
   は同値関係になることを示せ．(この商集合を X と Y を f によって貼り合わせた集合という．)

5　距離空間 (1) 定義と例

5.1　基本事項

- 集合 X について関数 $d : X \times X \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が X 上の距離であるとは
  距離の公理：(1) $d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$　(2) $d(x, y) = d(y, x)$　(3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$
- 線形空間 V について関数 $\| \quad \| : V \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が V 上のノルムであるとは
  ノルムの公理：(1) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0, \quad \|\boldsymbol{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$　(2) $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|$　(3) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$
- 距離空間の直積（定理 1.1）・部分距離空間
- 距離の同値性
- 中心 $p \in X$ 半径 $r > 0$ の距離球 $B_r(p) = \{x \mid d8x, p) < r\}$.　$K \subset X$ が有界集合であるとは K がある距離球に含まれることを言う.
- 写像により誘導される距離（定理 1.2），等長写像

5.2　命題問題等

1. 計量線形空間 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ について，
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$
はノルムである.
2. $X = \boldsymbol{R}^n$ について，次はノルムである.
$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$$
またこれらの定める距離をそれぞれ d_1，d_2，d_∞ とすれば次が成り立つ.
$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \sqrt{n} d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq n d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$
特にこれらの距離はすべて同値である.
3. $X = \boldsymbol{R}^2$ と前項の距離 d_1，d_2，d_∞ について $B_r(p)$ を図示せよ.
4. $X = C([0, 1], \boldsymbol{R})$ を $[0, 1]$ 区間上連続な実数値関数全体の集合とする．次はノルムである.
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2\, dx}, \quad \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid 0 \leq x \leq 1\}$$
またこれらの定める距離 d_1，d_2，d_∞ について次が成り立つ.
$$d_1(f, g) \leq d_2(f, g) \leq d_\infty(f, g).$$
5. 距離空間 (X, d) について，集合 $A \subset X$ が有界であるための必要充分条件は
$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} < \infty. \quad \mathrm{diam}(A) \text{ を } A \text{ の直径と呼ぶ.}$$
6. 同じ集合上の同値な二つの距離について有界性の概念は共通である.
7. 距離空間 (X, d_X)，(Y, d_Y) について，等長写像 $f : X \longrightarrow Y$ は単射である．また (Y, d_Y) から f によって X に誘導される距離は d_X と一致する.

6　距離空間 (2) 収束・連続

6.1　基本事項

- 距離空間 (X, d) の点列 $\{a_n\}$ とその極限
$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \iff \lim_{n\to\infty} d(a_n, b) = 0 \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \text{s.t.} \quad (n > N \Longrightarrow d(a_n, b) < \varepsilon)$$
- 極限の唯一性　ある点列について，その極限が存在すればそれは唯一つである．
- Cauchy 列と完備性　次の性質を満たす点列を Cauchy 列という．
$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \text{s.t.} \quad (n, m > N \Longrightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon)$$
収束する点列は Cauchy 列である．Cauchy 列が必ず収束するような距離空間を完備距離空間という．実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は通常の距離に関して完備である．
- 写像 $f : X \longrightarrow Y$ の極限
$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad (0 < d_X(x, a) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), b) < \varepsilon)$$
- 距離空間 (X, d_X) から距離空間 (Y, d_Y) への写像 $f : X \longrightarrow Y$ について $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つ時，f は a で連続であるという．X の各点で連続な時 f は X 上連続であるという．

6.2　命題問題等

1. 集合 X の二つの距離関数 d_1, d_2 について，$d_1(x, y) \le Cd_2(x, y)$ が常に成り立つとき，d_2 に関し収束する点列は d_1 に関しても同じ極限に収束する．また，d_2 に関する Cauchy 列は d_1 についても Cauchy 列になる．特に，この二つの距離が同値の場合には (X, d_1) が完備であれば (X, d_2) も完備である．
2. $C([0, 1])$ の点列（関数列) $\{f_n(t) = t^n\}$ の収束性と極限について考察せよ．
3. 二つの距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) とその直積距離空間 $(X \times Y, d_{X\times Y})$ について次が成り立つ．
   （a）$X \times Y$ の点列 $\{(x_n, y_n)\}$ が収束するための必要十分条件はそれぞれの成分のつくる点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ がともに収束することである．特に $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ が収束することと，その成分の作る n 個の数列 $\{x_{k,j}\}$, $1 \le j \le n\}$ が収束することとは同値である．
   （b）X, Y がともに完備であれば，$X \times Y$ も完備である．特に，$\boldsymbol{R}^n$ は完備である．
4. 区間 $I = [0, 1]$ 上の連続関数の列 $\{f_n\}$ が f に I 上一様収束することと d_∞ に関して f に収束することとは同値である．特に $(C([0, 1]), d_\infty)$ は完備距離空間である．このことから $C([0, 1])$ のノルム $\| \quad \|_\infty$ を一様ノルムという．
5. $(C([0, 1]), d_1)$ 上の関数
$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$$
連続であることを示せ．（極限と積分の交換）
6. 距離空間の間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ が，ある定数 L について
$$\forall x_1, x_2 \quad d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le L\, d_X(x_1, x_2)$$
を満たす時，f は連続である．このときリプシッツ連続という．
7. 距離空間の間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続であるためには次ぎが成り立つことが必要十分である．
$$\forall x \in X, \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$$

7 距離空間 (3) 位相構造

7.1 基本事項

- 内点，外点，境界点，触点，集積点，孤立点 (距離による定義，内点による定義)
- 内部 $A^\circ = A$ の内点全体の集合，閉包 $\overline{A} = A$ の触点全体の集合
- 開集合 $A^\circ = A$ ，閉集合 $\overline{A} = A$
- **定理** 閉集合であることと補集合が開集合であることは同値
- **定理（開集合の性質）**

  距離空間 (X, d) の開集合全体の集合族を $\mathcal{O}_d(X)$ と表す．

  (a) 全体集合及び空集合は開集合，$X, \emptyset \in \mathcal{O}_d(X)$

  (b) 開集合の合併は開集合，$U_\alpha \in \mathcal{O}_d(X) \Longrightarrow \cup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{O}_d(X)$.

  (c) 有限個の開集合の共通部分は開集合 $U_j \in \mathcal{O}_d(X) \Longrightarrow \cap_{j=1}^n U_j \in \mathcal{O}_d(X)$.
- **定理（連続写像）**

  $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ が連続であるための必要かつ充分な条件は，任意の Y の開集合の逆像が X の開集合であることである．

7.2 命題問題等

1. X の二つの距離 d_1, d_2 が同値であるとき，内点，集積点，開集合などの概念は共通である．
2. 距離空間 (X, d) において $B_r(x) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$ は開集合である．また，$D_r(x) = \{y \in X | d(x, y) \leq r\}$ は閉集合である．
3. A の内部 A° は開集合である．また，X の開集合で A に含まれるものは A° に含まれる．（ A° は A に含まれる最大の開集合）
4. A の閉包 $\overline{A}$ は閉集合である．また，X の閉集合で A を含むものは $\overline{A}$ を含む．（ $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合）
5. 閉集合は開集合の補集合であることを利用して開集合の性質に対応する閉集合の性質を書き出せ．
6. $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ が連続であることと，任意の Y の閉集合の逆像が X の閉集合であることとは同値である．
7. 実数を成分とする n 次正方行列全体の集合 $M(n, \boldsymbol{R})$ を $\boldsymbol{R}^{n^2}$ と同一視する．このとき，正則行列全体の集合 $GL(n, \boldsymbol{R})$ は開集合である．また，行列式が 1 の行列全体の集合 $SL(n, \boldsymbol{R})$ は閉集合である．
8. 直交行列全体の集合 $O(n)$ は有界な閉集合である．
9. (X, d) に 2 点 p, q をとる．p を含む開集合 U と q を含む開集合 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する．（これをハウスドルフ性という）
10. 直積距離空間 $(X \times Y, d_{X \times Y})$ において X の開集合 U と Y の開集合 V の直積 $U \times V$ は開集合である．
11. 直積距離空間 $(X \times X, d_{X \times X})$ において対角線集合 $\varDelta = \{(x, x) | x \in X\}$ は閉集合であることを示せ．
12. 距離空間 (X, d) の部分集合 A について，A の点列が収束する時その極限は A の閉包 $\overline{A}$ に含まれる．特に，完備距離空間の閉部分集合は完備距離空間になる．

8　距離空間 (4) コンパクト性

8.1　基本事項

- 距離空間 (X, d) においてその部分集合の属 $\{U_\alpha\}$ が集合 K の開被覆であるとは，各 U_α が開集合であってかつ $K \subset \cup_\alpha U_\alpha$ を満たすことをいう．
- コンパクト集合: K がコンパクトであるとは任意の K の開被覆に対してその有限部分被覆が存在することをいう．特に X 自身がコンパクトであるとき X をコンパクト距離空間という．
- **定理**　コンパクト集合は有界閉集合である．
- 点列コンパクト集合: K が点列コンパクトであるとは任意の K の点列が K の点に収束する部分列を持つことをいう．特に X 自身が点列コンパクトであるとき X を点列コンパクト距離空間という．
- **定理**　距離空間 X がコンパクトであることと点列コンパクトであることは同値である．このことから点列コンパクトをコンパクトの定義としても差し支えない．
- **定理**　$\boldsymbol{R}^n$ においてはその部分集合 K がコンパクトであることと有界閉集合であることは同値である．特に，閉区間，球面，境界を含めた球体，直交行列全体の集合などはすべてコンパクトである．
- **定理**　コンパクト集合の連続写像による像はコンパクトである．

8.2　命題問題等

1. 有限集合はコンパクトである．
2. コンパクト集合 K に含まれる閉集合 A はコンパクトである．
3. 閉区間は点列コンパクトである．
4. コンパクト集合 K の無限個の要素を持つ部分集合 A は K に集積点を持つ．すなわち
$$\exists x \in K \quad \text{s.t.} \quad \forall r > 0 \quad B_r(x) \cap A \text{ は無限集合.}$$
5. コンパクト集合 K の点列は K の点に収束する部分列を持つ．すなわち点列コンパクトである．
6. コンパクト集合 K は部分距離空間として完備である．
7. 二つの距離空間 (X, d_X)，(Y, d_Y) について K, H をそれぞれのコンパクト部分集合とする．このとき，$K \times H$ もコンパクト集合になる．
8. $(C([0,1]), d_\infty)$ においてその点列 $f_n(t) = t^n$ は収束する部分列を持たないことを示せ．またこのことを利用して有界閉集合 $K = \{f \in C([0,1]) \mid d_\infty(f, 0) \leq 1\}$ は（点列）コンパクトでないことを示せ．
9. コンパクト集合上の連続関数は最大値および最小値を持つ．
10. コンパクト距離空間上定義された連続な全単射は逆写像も連続である（同相写像という）．
11. X の部分集合 A, B に対して $d(A, B) = \inf\{d(a, b) | a \in A,\ b \in B\}$ と定める．A, B がともにコンパクトであるとき，次が成り立つことを示せ．
$$A \cap B \neq \emptyset \Longleftrightarrow d(A, B) = 0.$$