理学共通科目「実数と論理」講義ノート

この科目の主要な目的は，数学における論理の展開の仕方を学習することである．これまでの数学の授業科目が，基本的概念の理解とその取り扱い方（計算方法）の習得を主要な目的にしていたのに対し，この講義では数学的事実の「証明」をどう理解すればよいのか，自ら証明を組み立てていくためにはどういう考え方が必要かを学ぶ．計算や実例をもとに感覚的に理解しようという立場には限界があり，それを乗り越えるためにはこのような「論理」的手法が必要不可欠である．題材は，高校時代からなじみのある実数なので，そのときの感覚も大事にしながらこの講義で扱う内容をじっくり考えていって欲しい．

1　集合と論理

数学の最も基本的な対象は集合である．この節では集合と論理についての基本事項を学習する．

1.1　集合に関する基本概念

まず以下の記号については既知とする．

記号	関連記号	意味	要素を使った理解
$p \in A$	$\ni, \notin$	p は集合 A の要素である．	
$A \subset B$	$\supset, \subsetneq, \supsetneq$	集合 A は集合 B の部分集合である．	$p \in A$ ならば $p \in B$
$A \cup B$	$\cap$	A と B の合併	$p \in A \cap B$ とは $p \in A$ かつ $p \in B$ を意味する．
A^c		A の補集合	$p \in A^c$ とは $p \notin A$ を意味する．
$\emptyset$		空集合	

（注１）記号の使い分けの慣習として，大文字で集合を小文字で要素を表す．
（注２）集合と要素で使われる記号が異なるので，考えている対象が集合なのか要素なのかをきちんと区別することは重要である．一方，集合の要素となるものは，数，数列，関数，行列，ベクトル，写像等である[*1]が，集合そのものを要素とする場合もある．この混同を避けるために，集合を要素とする集合を集合族と呼ぶ場合がある．
（注３）$\in$ と $\subset$ を「に含まれる」と読む場合もあるが，異なる記号なので上のように区別して読む習慣をつけて欲しい．
（注４）A^c が意味を持つには A を含む全体集合が定義されていなければならない．
（注５）高校までの数学においては補集合を $\overline{A}$ で表したが，この使い方は現代の数学では殆どみられない．

次の基本的集合を表す記号は断りなしに用いる．

$\mathbb{N}$	自然数全体の集合	$\mathbb{Z}$	整数全体の集合	$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合
$\mathbb{R}$	実数全体の集合	$\mathbb{C}$	複素数全体の集合		

もう一つ重要な記号として**直積集合** $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ がある．これは A の要素と B の要素の組全体の集合である．例えば $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ であり，これは座標平面である．$I = [0, 1]$ とするとき，$I \times I$ は $\mathbb{R}^2$ 内の $(0, 0)$ $(1, 0)$ $(1, 1)$ $(0, 1)$ を頂点とする正方形である．**差集合** $A - B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\} = A \cap B^c$ もよく使われる．

[*1] これは少し言いすぎな表現である．分野によってより多様なものが集合として扱われている．しかし，無限定に集合を「ものの集まり」とするのも問題である．当面はこのように限定的に捉えていたほうが良いと思う．

1.2 集合に関する論理の基本事項

数学的文章を命題[*2]と呼ぶ．$A \subset B$ や $p \in A \cap B$ は命題であるが，$A \cap B$ は命題ではない．さて，（いくつかの）命題から別の命題を作る記号として

$$P \Longrightarrow Q^{*3}, \quad P \Longleftarrow Q, \quad P \Longleftrightarrow Q, \quad \neg P(P\text{ の否定}), \quad P \wedge Q(P\text{ かつ }Q), \quad P \vee Q(P\text{ または }Q)$$

次の主張は数理論理の基本である．自明なこととして自然に理解できるようにしておかなくてはならない．

$$\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q), \qquad \neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

以上の記号を使うとド・モルガンの公式 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ は次のように論理のみで証明できる．

$$\begin{aligned} p \in (A \cap B)^c &\Longleftrightarrow \neg(p \in A \cap B) \Longleftrightarrow \neg\left((p \in A) \wedge (p \in B)\right) \Longleftrightarrow \neg(p \in A) \vee \neg(p \in B) \\ &\Longleftrightarrow (p \in A^c) \vee (p \in B^c) \Longleftrightarrow p \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

高校で学習したベン図を利用した証明は直感に頼っており，より高度な扱いのためには役に立たない．

1.3 全称記号と存在記号

数多くの（無限個の場合を含む）対象を同時に扱うには，**全称記号** $\forall$（すべての）と**存在記号** $\exists$（存在する）が必要になる．例えば x によって定まる命題 $P(x)$ について

$$\forall x, P(x) \Longleftrightarrow \text{すべての } x \text{ について } P(x) \text{ が成り立つ.}$$

$$\exists x, P(x) \Longleftrightarrow \text{ある } x \text{ が存在して } P(x) \text{ が成り立つ.}^{*4}$$

のように定める．これらは x によらない命題[*5]である．この記号によって無限個の集合の合併および共通部分が次のように定義できる．

$$p \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \lambda \in \Lambda, p \in A_\lambda, \qquad p \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda \in \Lambda, p \in A_\lambda$$

ここで，Λ は添え字の集合であり自然数や実数の集合が良く用いられる．

この定義により以下のような自明と思える事実にも明確な証明を与えることができる．

命題 1.1. （無限個の）集合の組 $\{A_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$ について次が成り立つ．

$$(1)\ \forall \lambda,\ A_\lambda \subset B \Longrightarrow \bigcup_\lambda A_\lambda \subset B, \qquad (2)\ \forall \lambda,\ C \subset A_\lambda \Longrightarrow C \subset \bigcap_\lambda A_\lambda$$

$$(3)\ \exists \lambda,\ A_\lambda \subset B \Longrightarrow \bigcap_\lambda A_\lambda \subset B, \qquad (4)\ \exists \lambda,\ C \subset A_\lambda \Longrightarrow C \subset \bigcup_\lambda A_\lambda$$

証明. (1) について，$x \in \bigcup_\lambda A_\lambda$ をとる．$\exists \lambda,\ x \in A_\lambda$ であるが，仮定より $A_\lambda \subset B$ なので $x \in B$ となる．ゆえに $\bigcup_\lambda A_\lambda \subset B$ が成り立つ．

他の主張も同様に証明できる． □

証明の基本１ $A \subset B$ を示すには，A の要素 $x \in A$ をとって，それが $x \in B$ を満たすことを示す．この証明では，$\bigcup_\lambda A_\lambda \subset B$ を示したいのだから，まず $x \in \bigcup_\lambda A_\lambda$ をとる．要素をとって考えることが基本である．

[*2] ここでの命題は数学的文章の意味であって真偽を問わない．偽の命題という表現もある．一方，重要度の低い定理を命題と呼ぶこともある．

[*3] P が真であれば Q も真になることを主張する．P，Q が真であるといっているのではない．例えば「$1 = 0$」$\Longrightarrow Q$ は Q がどんな命題であっても真である．

[*4] 「$P(x)$ が成り立つような x が存在する」としたほうが自然な日本語だが，英語での語順に従ってこのように表現することが多い．

[*5] 命題の表現に x が使われているが，命題自体の真偽は x に無関係であることをいう．例えば「$\forall x\ x^2 > 0$」は偽である．これに対し「$x^2 > 0$」は x によって真偽の変わる命題である．

1.4　否定命題の作り方

数学の概念や命題は，その否定を含めて明確に理解できるものでなくてはいけない．例えば「収束する」を理解するためには「収束しない」ということも理解できている必要がある．このことは第 3 節以降で具体的に考察する．ここでは ∀， ∃ を使った命題の否定の作り方の基本を紹介する．

命題 1.2 (否定命題の作り方の基本)**.**

$$\neg(\forall x, P(x)) \Longleftrightarrow \exists x, \neg P(x), \qquad \neg(\exists x, P(x)) \Longleftrightarrow \forall x, \neg P(x)$$

これにより無限個の集合に対するド・モルガンの公式が証明できる．

命題 1.3 (ド・モルガンの公式)**.**

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda)^c, \qquad \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda)^c$$

証明.

$$x \in \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c \Longleftrightarrow \neg\left(x \in \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\right) \Longleftrightarrow \neg\,(\forall\lambda\in\Lambda,\ x\in A_\lambda)$$
$$\Longleftrightarrow \exists\lambda\in\Lambda,\ \neg\,(x\in A_\lambda) \Longleftrightarrow \exists\lambda\in\Lambda,\ x\in {A_\lambda}^c \Longleftrightarrow x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda)^c$$

□

例題 1. A を実数全体の集合の部分集合とする ($A \subset \mathbb{R}$)．また c を実数とする ($c \in \mathbb{R}$)．次の命題の意味を考察せよ．また，その否定を ¬ を使わずに表示せよ．

$$(1)\, \forall x\in A,\ x \leqq c, \qquad (2)\, \exists x\in A,\ x\leqq c$$

解答. (1) はすべての A の要素 x について $x \leqq c$ が成り立つという意味である．この否定は，ある A の要素 x については $x \leqq c$ が成り立たないということで，$\exists x \in A,\ x > c$ と表せる．後半は省略する．□

ならば $\Longrightarrow$ を使った命題 $P(x) \Longrightarrow Q(x)$ は「$P(x)$ を満たす全ての x について $Q(x)$ が成り立つ」と理解できる．ゆえにこの否定命題は，「$P(x)$ を満たすある x について $Q(x)$ の否定が成り立つ」[*6]となる．x は $P(x)$ と $\neg Q(x)$ を満たすことになるので

$$\exists x, P(x) \land \neg Q(x)$$

と記述できる．$P(x) \land \neg Q(x)$ を満たす x の具体例を $P(x) \Longrightarrow Q(x)$ の**反例**と呼ぶ.

問題集 1

問 1.1 $\forall x,\ P(x)$ と $\exists x,\ P(x)$ はどちらが強い命題か. [*7]
問 1.2 次の集合の包含関係を示せ.

$$(1)\quad \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0, 2-\frac{1}{n}\right] \subset [0,2) \qquad (2)\quad \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, 2+\frac{1}{n}\right) \supset (0,2]$$

[*6] 素朴には「$P(x)$ が成り立つからといって $Q(x)$ が成り立つとは限らない」と理解できる．
[*7] 一般に，命題 P が命題 Q を含意するとき，P を Q より強い命題という．例えば「x は 6 の倍数である」という命題は「x は 3 の倍数である」という主張より強い主張である．$P \Longrightarrow Q$ が成り立つことと同じである．

問 1.3 関数 $f(x,y)$ が与えられたとき，二つの実数 x, y に関する命題

$$(1)\ \forall x,\ \exists y,\quad f(x,y)>0 \qquad (2)\ \exists y,\ \forall x,\quad f(x,y)>0$$

を記号を使わずに表現せよ．また，$f(x,y)=y-x^2$ と $g(x,y)=x+y^2$ について，(1) 及び (2) の真偽を調べよ．

問 1.4 次の命題の否定命題を作れ．

$$(1)\ x>0 \Longrightarrow f(x)>0, \qquad (2)\ \forall x,\ \exists y,\quad f(x,y)>0$$

2　写像と同値関係

2.1　写像

集合 X のそれぞれの要素に対して，集合 Y の要素を定める対応を**写像**と呼び

$$f: X \longrightarrow Y \qquad X \ni x \mapsto f(x) \in Y$$

と表す．X を**定義域**，Y を**値域**[*8]という．前者は集合に着目した表記法，後者は要素に着目した表記法である．矢印の微妙な違いに注意すること．$A \subset X$ について f の定義域を A に制限したものを $f|_A$ と表し f の A への**制限**と呼ぶ．$f|_A : A \longrightarrow Y$ である．$f(X)=\{f(x) \mid x \in X\}$ を f の像と呼ぶ．$f(X) \subset B \subset Y$ なる B について f の値域を B に制限（**値域の制限**）することができる．実質的には f そのものなのでこの制限は f のまま表すことが多い．

実は数学における基本的な対象の殆どが集合と写像として見直すことができる．

1. 2 次関数 $y=x^2$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像を定める．写像の定義域と値域が数の集合であるとき関数と呼ぶ．なお，値域を $[0,\infty)$ に制限することもできる．
2. 実数列 $\{a_n\}$ は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像である．関数列 $\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{N}$ から関数の集合への写像である．
3. $m\times n$ 型行列 A の定める線形写像 $f_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像である．
4. C^1 級関数 $f(x)$ に対してその導関数を対応させる操作 $f(x)\mapsto f'(x)$ は C^1 級関数全体の集合から連続関数全体の集合への写像である．
5. $[0,1]$ 区間上の連続関数に対して定積分を行う操作 $f(x)\mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ は $\mathbb{R}$ への写像である．
6. 実数の掛け算 $(x,y)\mapsto xy$ は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への写像である．

写像で重要なことは X の要素に対して Y の要素がただ一つ定まることである．n 次方程式に対してその解を対応させる対応は，解は一つとは限らないので写像ではない．

2.2　写像に関する基本事項

写像 $f: X \longrightarrow Y$ と $A \subset X$ について

$$f(A)=\{f(x) \mid x \in A\} \subset Y$$

を f による A **の像**[*9]と呼ぶ．また $B \subset Y$ について

$$f^{-1}(B)=\{x \mid f(x) \in B\} \subset X$$

[*8] 値域について高校の数学 I では $f(x)$ のとりえる値全体の集合として扱われているが，この理解は数学一般における扱い方と意味が異なる．

[*9] 高校数学での値域はこの像に相当する．

を f による B **の逆像**[*10]と呼ぶ．逆像は分かりづらい概念であるが写像を理解するための鍵となる概念である．

写像 $f: X \longrightarrow Y$ が**単射**であるとは

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$[*11]

が成り立つことを言う．また**全射**であるとは

$$f(X) = Y \text{ すなわち } \forall y \in Y, \exists x \in X, \quad f(x) = y$$

が成り立つことを言う．値域を $f(X)$ に制限した写像 $f: X \longrightarrow f(X)$ は全射である．

写像が全射かつ単射であるとき**全単射**という．

2 つの写像 $f: X \longrightarrow Y$ と $g: Y \longrightarrow Z$ が与えられたとき，**合成写像** $g \circ f: X \Longrightarrow Z$, $g \circ f(x) = g(f(x))$ が定められる．これについて次の命題が成り立つ．

命題 2.1. (1) $g \circ f$ が全射ならば g は全射である．
(2) $g \circ f$ が単射ならば f は単射である．

証明. (1) $g \circ f$ が全射なので $\forall z \in Z$ について $g \circ f(x) = z$ となる $x \in X$ が存在する．この x について $y = f(x) \in Y$ と定めれば $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z$ を得るが，これは g が全射であることを表している．
(2) $f(x_1) = f(x_2)$ とする．合成写像の定義から $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ が成り立つ．$g \circ f$ は単射なので $x_1 = x_2$ である．ゆえに f は単射である． □

証明の基本 2 全射の定義には ∃ が含まれているが，このような命題の証明には，具体的にどのようにとるかを記述するのが基本である．この証明では g が全射であることを示すのであるから，各 $z \in Z$ に対して $g(y) = z$ を満たす y を具体的にどうとるかを述べている．

X から X への写像 $I_X: X \longrightarrow X$, $I_X(x) = x$ を集合 X 上の**恒等写像**と呼ぶ．恒等写像は全単射である．写像 $f: X \longrightarrow Y$ について，$g: Y \longrightarrow X$ が

$$g \circ f = I_X, \quad f \circ g = I_Y$$

を満たすとき g を f の**逆写像**と呼ぶ．命題 2.1 より逆写像が存在すれば f は全単射である．この逆も成り立つ．

命題 2.2. 写像 f が逆写像を持つためには f が全単射であることが必要十分である．またそのとき f の逆写像は唯一つである．

証明. $f: X \longrightarrow Y$ が全単射であるとする．各 $y \in Y$ について f は全射なので $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する．さらに f は単射なので $f(x) = y$ となる x はちょうど一つだけ存在することになる．$y \in Y$ に対してこのようにして定められる $x \in X$ を対応させる写像を g とする．定め方から $f(x) = y \Longleftrightarrow x = g(y)$ が成り立つ．ここで $y = f(x)$ とおけば

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = x$$

$x = g(y)$ とおけば

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = y$$

を得るので，g は f の逆写像である．また逆写像はこのようにして定められるものしかないので唯一である． □

[*10] 逆写像が存在する場合には逆写像による B の像と一致するが，逆写像が存在しない場合でも定義できる．

[*11] 対偶を取って $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ としても良い．

2.3 同値関係

数学では集合の要素一つ一つを見るのではなく，いくつかの類に分けて考察することが多い．その類別を与えるための基本的概念が同値関係である．$\sim$ が集合 X 上の**同値関係**であるとは次の 3 つが成り立つことを言う．

$$\begin{array}{ll} x \sim x & \text{反射律} \\ x \sim y \Longrightarrow y \sim x & \text{対称律} \\ x \sim y \text{ かつ } y \sim z \Longrightarrow x \sim z & \text{推移律} \end{array}$$

同値関係の例をあげる．

1. $\mathbb{Z}$ において， $n \sim m \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} n - m$ は 5 の倍数.
2. $\mathbb{R} - \{0\}$ において， $x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} xy > 0$.
3. $\mathbb{R}$ において， $x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x - y \in \mathbb{Z}$.
4. $[0, 1]$ 区間上の連続関数全体の集合において， $f \sim g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(x) - g(x) = $ 一定.
5. 平面上の三角形全体の集合において， $\triangle ABC \sim \triangle DEF \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle DEF$.
6. $m \times n$ 型行列全体の集合において， $A \sim B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A$ は基本変形で B にできる．
7. n 次正方行列全体の集合において， $A \sim B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} P^{-1}AP = B$ となる正則行列 P が存在する．

集合 X に同値関係が与えられているとき，互いに同値なものをひとまとめにして**同値類**と呼ぶ．$a \in X$ の属する同値類を $[a]$ と表す．同値類を X の要素によって $[a]$ と表したとき a を $[a]$ の**代表元**[*12]と呼ぶ．

$$[a] = \{x \in X \mid a \sim x\} \qquad [a] = [b] \Longleftrightarrow a \sim b$$

この同値類によって集合 X は**類別**される．すなわち

命題 2.3. (1) X の各要素はいずれか一つそして一つのみの同値類に属している．
(2) X は同値類たちの互いに交わらない合併（disjoined union）になっている．

証明. 反射律より $x \in [x]$ なので X の各要素はどれかの同値類に属している．ここで x が別の同値類 $[y]$ にも入っているとする．$y \sim x$ である．

$z \in [x]$ ならば $x \sim z$ であるが，$y \sim x$ とあわせて推移律より $y \sim z$ を得る．$z \in [y]$ であり，$[x] \subset [y]$ が成り立つ．

逆に $w \in [y]$ ならば $y \sim w$ であり，$y \sim x$ とあわせて対称律，推移律より $w \sim [x]$ を得る．$[y] \subset [x]$ であり，$[x] = [y]$ を得る．ゆえに x は $[x]$ 以外の同値類には含まれない． □

証明の基本３ 集合の等式 $A = B$ を示すには $A \subset B$ と $A \supset B$ の両方を示す．命題 1.3 の証明のように $\Longleftrightarrow$ で議論を行えるのは稀な場合である．

同値類を一つの要素と見た集合を $(X, \sim)$ の定める**商集合**と呼び $X/\sim$ と表す．最初にあげた同値関係の例のうち，初めの三つについて商集合を与えておく．

1. $\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ であり要素 5 個の有限集合，$[k] = \{5n + k \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$
2. $(\mathbb{R} - \{0\})/\sim = \{[-1], [1]\}$ であり要素 2 個の有限集合，$[-1] = (-\infty, 0)$, $[1] = (0, \infty)$
3. $\mathbb{R}/\sim = \{[r] \mid 0 \leqq r < 1\}$ であり無限集合，$[r] = \{r + n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$

与えられた写像から全単射を構成する方法を与えておく．

[*12] 同値類は X の部分集合である．代表元はその部分集合の要素のどれをとっても構わない．代表元の選び方は一通りではない．

命題 2.4. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が与えられているとき，
(1) X において $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$ は同値関係になる．
(2) $[x] \in X/\sim$ に対して $f(x) \in Y$ は $[x]$ の代表元のとり方によらない．
(3) $g : X/\sim \longrightarrow f(X)$ を $g([x]) = f(x)$ で定める[*13]とき g は全単射である．

証明. (1) $f(x) = f(x)$ であるから $x \sim x$ であり反射律が成り立つ．$x_1 \sim x_2$ とすると $f(x_1) = f(x_2)$ であるが $f(x_2) = f(x_1)$ も成り立つので $x_2 \sim x_1$ を得る．ゆえに対称律が成り立つ．$x_1 \sim x_2$ かつ $x_2 \sim x_3$ とすると $f(x_1) = f(x_2)$ かつ $f(x_2) = f(x_3)$ が成り立つので $f(x_1) = f(x_3)$ となる．ゆえに $x_1 \sim x_2$ であり推移律が成り立つ．
(2) $[x]$ から別の代表元 u をとると $u \in [x]$ であるから $x \sim u$ である．$f(x) = f(u)$ であり，代表元を取り替えても $f(x)$ は変わらない．
(3) $y \in f(X)$ はある $x \in X$ により $y = f(x)$ と表示されるので $y = g([x])$ であり g は全射である．$g([x_1]) = g([x_2])$ とすると，$f(x_1) = f(x_2)$ なので $x_1 \sim x_2$ である．ゆえに $[x_1] = [x_2]$ であり g は単射である． □

証明の基本 4 同値関係であることの証明は，反射律，対称律，推移律を一つずつ示していく．対称律と推移律は「ならば」を使った命題になので仮定と結論を明確にしなくてはならない．

2.4 集合の濃度

2 つの集合 X, Y において

$$X \sim Y \overset{\text{def}}{\iff} X \text{ から } Y \text{ への全単射が存在する．}$$

とすればこれは同値関係[*14]である．X が有限集合のときは $X \sim Y$ は Y も要素の個数が同じ有限集合であることを述べている．そこでこの同値類を要素の個数を一般化した概念と捉え**濃度**と呼び $\mathfrak{c}(X)$ と表す．$\mathfrak{c}(X) = \mathfrak{c}(Y)$ とは $X \sim Y$ すなわち X から Y への全単射が存在することに他ならない．

X から Y への単射が存在するとき $\mathfrak{c}(X) \leqq \mathfrak{c}(Y)$ と表すこと，さらに X から Y への全単射が存在しないとき $\mathfrak{c}(X) < \mathfrak{c}(Y)$ と表すことは自然であろう．ここでは次を示すにとどめる．

命題 2.5. (1) X が無限集合ならば $\mathfrak{c}(X) \geqq \mathfrak{c}(\mathbb{N})$.
(2) $\mathfrak{c}(\mathbb{Q}) = \mathfrak{c}(\mathbb{N})$.
(3) $\mathfrak{c}(\mathbb{R}) > \mathfrak{c}(\mathbb{N})$.

証明. (1) まず，$a_1 \in X$ をとる．$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ をとったとき $X - \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}\}$ は無限集合から有限集合を取り除くので空集合ではない．そこでここから $a_n \in X - \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}\}$ をとる．こうして帰納的に $\mathbb{N}$ から X への写像を定めれば[*15]，とり方からこれは単射である．ゆえに $\mathfrak{c}(X) \geqq \mathfrak{c}(\mathbb{N})$ が成り立つ．
(2) まず，自然数の組で互いに素なもの全てを整列し $\{(a_n, b_n)\}$ とおく[*16]．1 番目を 0，$2n$ 番目を a_n/b_n，$2n+1$ 番目を $-a_n/b_n$ とすればすべての有理数を重複なく整列できる．$\mathbb{N}$ から $\mathbb{Q}$ への全単射が構成できたことになるので $\mathfrak{c}(\mathbb{Q}) = \mathfrak{c}(\mathbb{N})$ である．
(3) $\mathbb{N}$ から $(0, 1]$ への写像を数列とみなし $\{a_n\}$ とおく．a_n を 10 進小数で表記し，小数点以下第 n 位の数が 5 以上の場合は $\beta_n = 2$ と，また 4 以下の場合は $\beta_n = 8$ と定める．

$$b = 0.\beta_1\beta_2\beta_3 \cdots \beta_n \cdots \in (0, 1]$$

[*13] この g が定義できるためには (2) を示さなければならない．(2) が成り立つことを g が well-defined であるという．
[*14] 集合全体の集合という概念はない（これを許すと矛盾が生じる．ラッセルの逆理として知られている．）のでこの表現は厳密ではない．しかし，反射律，対称律，推移律は簡単に証明できる．
[*15] 実際に構成できるのは $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ から X への単射なのでこの議論には若干のギャップがある．
[*16] 整列の仕方はいろいろあるが講義で解説する．

と定めれば，$b = a_n$ となる n は存在せず，この写像が全射になることはない． □

$\mathfrak{c}(\mathbb{N})$ を**可算濃度**，$\mathfrak{c}(\mathbb{R})$ を**連続濃度**という．可算濃度を持つ無限集合を**可算集合**，可算濃度より大きな濃度を持つ無限集合を**非可算集合**，可算集合と有限集合を合わせて**高々可算集合**と呼ぶ．非可算無限集合の濃度は連続濃度よりさらに大きなものがある．

命題 2.6. 集合 X に対して X の部分集合全体のなす集合を X の**ベキ集合**と呼び $\wp(X) = \{A \mid A \subset X\}$ と表す．$\mathfrak{c}(\wp(X)) > \mathfrak{c}(X)$ である．

証明. 写像 $f : X \longrightarrow \wp(X)$ について

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$[17]

と定める．$f(a) = A$ となる $a \in X$ が存在したとすると，$a \in A$ としても $a \notin A$ としても矛盾が生じる．ゆえに，A は f の像に入らず，f は全射ではない． □

X が有限集合のときは濃度は X の要素の個数であり，$\mathfrak{c}(\wp(X)) = 2^{\mathfrak{c}(X)}$ が成り立つ．無限集合についても $\mathfrak{c}(\wp(X)) = 2^{\mathfrak{c}(X)}$ と表すことにすれば命題 2.6 は次の式で表せる．

$$2^{\mathfrak{c}(X)} > \mathfrak{c}(X)$$

問題集 2

問 2.1 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定めるとき次の集合を求めよ．

$$f((-1,2]),\quad f(\mathbb{R}),\quad f^{-1}([1,4]),\quad f^{-1}((-2,-1)),\quad f^{-1}(\mathbb{R}),\quad f^{-1}(\{1\})$$

問 2.2 写像 $f : X \longrightarrow Y$ について次を示せ．

$$f(\cap_\lambda U_\lambda) \subset \cap_\lambda f(U_\lambda),\qquad f(\cup_\lambda U_\lambda) = \cup_\lambda f(U_\lambda)$$
$$f^{-1}(\cap_\lambda V_\lambda) = \cap_\lambda f^{-1}(V_\lambda),\qquad f^{-1}(\cup_\lambda V_\lambda) = \cup_\lambda f^{-1}(V_\lambda)$$

問 2.3 写像 $f : X \longrightarrow Y$ について次を示せ．

(1) f が全射 $\Longleftrightarrow$ すべての $y \in Y$ について $f^{-1}(\{y\})$ の要素の個数は 1 個以上.

(2) f が単射 $\Longleftrightarrow$ すべての $y \in Y$ について $f^{-1}(\{y\})$ の要素の個数は 1 個以下.

問 2.4 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ において，『$n \sim m \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} n - m$ は p の倍数』は同値関係であることを示せ．ただし p は 2 以上の自然数である．

『$n \sim m \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} n + m$ は p の倍数』は同値関係になるか考察せよ．

問 2.5 可算集合と可算集合の直積集合は可算集合であることを示せ．

3 実数の連続性

3.1 連続性公理

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A について

$$\forall x \in A,\quad x \leqq c$$

が成り立つような $c \in A$ が存在するとき，A は**上に有界**であるという．また c を A の**上界**という．同様に**下に有界**，**下界**も定義される．上下に有界な時 A は**有界**であるという．

[17] $f(x) \in \wp(X)$ より $f(x)$ は X の部分集合である．

c が A の上界であるとき，c より大きい数はすべて A の上界である．A の上界の中で最も小さいものを a の**上限**と呼ぶ．α が A の上限であるとは次の二つが成り立つことを言う．

$$(1)\forall x \in A, \quad x \leqq \alpha \qquad (2)\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A, \quad x > \alpha - \varepsilon$$

(1) は α が A の上界であること，(2) は $\alpha - \varepsilon$ がもはや A の上界ではないことを述べている．次の性質は**実数の連続性公理**と呼ばれ，実数と特徴付ける最も基本的な性質である．

実数の連続性公理　上に有界な集合には上限が存在する．

A の上限を $\sup A$ と表す．A が上に有界でないときは $\sup A = \infty$ と表す．同様に下限を $\inf A$ と表す．$A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$，$cA = \{cx \mid x \in A\}$ と表せば，

命題 3.1.

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B, \qquad \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

$$c > 0 \text{ のとき} \qquad \sup(cA) = c \sup A, \qquad \inf(cA) = c \inf A$$

$$c < 0 \text{ のとき} \qquad \sup(cA) = c \inf A, \qquad \inf(cA) = c \sup A$$

証明. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ のみ示す．$\forall u \in A + B$ について u は $u = x + y,\ x \in A,\ y \in B$ の形に表せる．$x \leqq \sup A,\ y \leqq \sup B$ より $u = x + y \leqq \sup A + \sup B$ である．すなわち，$\sup A + \sup B$ は $A + B$ の上界である．

$\forall \varepsilon > 0$ について $\sup A - \varepsilon/2$ は A の上界ではない．そこで $x > \sup A - \varepsilon/2$ となる A の要素 x が存在する．同様に $y > \sup B - \varepsilon/2$ となる B の要素 y が存在する．$x + y \in A + B$ でありかつ $x + y > \sup A + \sup B - \varepsilon$ なので $\sup A + \sup B - \varepsilon$ は A の上界ではない．ゆえに，$\sup A + \sup B$ は $A + B$ の上限である．□

3.2　数列の極限

従来学習してきた数学では，極限を直感的に扱っていたため厳密な議論を行うことができなかった．その弱点を克服するため，まず数列の極限から定義する．

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 『\forall \varepsilon > 0,\ \exists N, \quad (n \geqq N \Longrightarrow |a_n - b| < \varepsilon)』$$

従来の直感的な定義「n を大きくしていけば a_n は b に限りなく近づく」において，「大きくしていけば」を「$\exists N$ と $n \geqq N$」で表し，限りなく近づくを「$\forall \varepsilon > 0$ と $|a_n - b| < \varepsilon$」で表している．この定義により今まで直感的に理解していた事実に厳密な証明を与えることができる．

命題 3.2. 極限は存在すれば唯一である．

証明. 数列 $\{a_n\}$ が異なる値 $b,\ c\ (b < c)$ について極限の定義を満たしたとする．$\varepsilon > 0$ を $\varepsilon < (c - b)/2$ となるようにとる．極限の定義から

$$\exists N_1, \quad (n \geqq N_1 \Longrightarrow |a_n - b| < \varepsilon)$$
$$\exists N_2, \quad (n \geqq N_2 \Longrightarrow |a_n - c| < \varepsilon)$$

であるが，$n \geqq \max\{N_1, N_2\}$[*18] ととれば

$$|c - b| \leqq |c - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon < (c - b)$$

となり矛盾が生じる．□

[*18] max とは最大をとることを言う．対象が有限個の場合には最大が存在する．

数列 $\{a_n\}$ が**有界**であるとは，$\{a_n\}$ たちのなす集合（厳密には数列を $\mathbb{N}$ からの写像とみたときの像のことである．数列の**台集合**と呼ぶ．）が有界であることを言う．

命題 3.3. 収束する数列は有界である．

証明. $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ とし $\varepsilon = 1$ について N を

$$n \geqq N \Longrightarrow |a_n - b| < 1$$

が成り立つようにとる．

$$K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |b| + 1\}$$

とおけば，すべての n について $|a_n| \leqq K$ が成立する． □

定理 3.4. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \alpha \pm \beta, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$$

が成り立つ．さらに $\beta \neq 0$ のときは十分大きな n について $b_n \neq 0$ となり

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立つ．

証明. 和と差については省略する．積について，K をすべての n について $|a_n| < K$ が成立するようにとれば

$$|a_n b_n - \alpha\beta| \leqq |a_n(b_n - \beta)| + |(a_n - \alpha)\beta| \leqq K|b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha|$$

が成り立つ．ここで $\rho > 0$ に対して N_1 を

$$n \geqq N_1 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \rho$$

N_2 を

$$n \geqq N_2 \Longrightarrow |b_n - \beta| < \rho$$

となるようにとれば $n \geqq \max\{N_1, N_2\}$ について

$$|a_n b_n - \alpha\beta| < (K + |\beta|)\rho$$

を得る．$\forall\varepsilon > 0$ に対して $\rho = \dfrac{\varepsilon}{K + |\beta|}$ とおいて，以上の議論を行い，$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおけば

$$n \geqq N \Longrightarrow |a_n b_n - \alpha\beta| < \varepsilon$$

が成立し，積の極限の等式が証明できる．

商については，N_3 を

$$n \geqq N_3 \Longrightarrow |b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$$

とおけば $n \geqq N_3$ について $|b_n| > \dfrac{|\beta|}{2}$ であるので

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{1}{|b_n||\beta|}\,|(a_n - \alpha)\beta + \alpha(\beta - b_n)| \leqq \frac{2}{|\beta|}|a_n - \alpha| + \frac{2|\alpha|}{|\beta|^2}|b_n - \beta|$$

を得る．よって $n \geqq N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ とすれば

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta}\right| < \left(\frac{2}{|\beta|} + \frac{2|\alpha|}{|\beta|^2}\right)\rho$$

となるので積の場合と同様に商の極限の等式を示すことができる． □

定理 3.5. 単調増加上に有界な数列は上限に収束する．

証明. α を $\{a_n\}$ の上限とする．$\forall\varepsilon > 0$ について $\alpha - \varepsilon$ は $\{a_n\}$ の上界ではないので，$\alpha - \varepsilon < a_N$ となるように番号 N をとることができる．$n \geqq N$ ならば単調増加性より $a_N \leqq a_n$ である．また α は上界なので

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leqq \alpha$$

を得る．$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ であり，$\{a_n\}$ は α に収束する． □

例題 2. 数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ は 0 に収束することを証明せよ．

解答. $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ について $\inf A = 0$ を示せばよい．0 が A の下界であることは明らかなので 0 より大きい数が A の下界でないことをいう．そこで $\varepsilon > 0$ をとる．自然数 N を $N > \frac{1}{\varepsilon}$ ととれば[*19]，$\varepsilon > \frac{1}{N} \in A$ である．ゆえに ε は A の下界ではない． □

例題 3. $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[0, 1 + \frac{1}{n}\right) = [0, 1]$ を示せ．

解答. $[0, 1 + \frac{1}{n}) \supset [0, 1]$ より $\supset$ の包含関係は命題 1.1 を使えば良い．一方，$x > 1$ とすれば，$x - 1 > \frac{1}{n}$ となる自然数 n が存在するので $x \notin [0, 1 + \frac{1}{n})$ であり，$x \notin \cap_{n=1}^{\infty}[0, 1 + \frac{1}{n})$ を得る．$x < 0$ がこの集合に属さないのは自明なので，$\subset$ の包含関係を得る． □

3.3 実数の完備性

数列 $\{a_n\}$ について，その一部を取り出した数列

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \ldots \quad \text{について} \quad \{a_{n_k}\} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots\}$$

を**部分列**という．

実数 α が数列 $\{a_n\}$ の**集積点**であるとは

$$\forall\varepsilon > 0, \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon \text{を満たす } n \text{ は無限に多く存在する．}$$

が成り立つことを言う．

命題 3.6. α が数列 $\{a_n\}$ の集積点であることと，数列 $\{a_n\}$ が α に収束する部分列を持つこととは同値である．

証明. $\{a_{n_k}\}$ が α に収束する部分列であれば $\forall\varepsilon > 0$ に対して

$$\exists K,\ k \geqq K \Longrightarrow |a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．ゆえに $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ を満たす n として $\{n_K, n_{K+1}, n_{K+2}, \ldots\}$ が取れるので α は集積点である．

逆に α が数列 $\{a_n\}$ の集積点であると仮定する．まず n_1 を

$$|a_{n_1} - \alpha| < 1$$

となるように取る．以下帰納的に，n_{k-1} が取れたとして n_k を

$$n_k > n_{k-1}, \quad \text{かつ} \quad |a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k}$$

を満たすようにとる．仮定から第 2 の条件を満たす番号は無限に多くあるので，第 1 の条件を合わせて満たす n_k は存在する．第 1 の条件から $\{a_{n_k}\}$ は $\{a_n\}$ の部分列であり，また第 2 の条件から α に収束する． □

[*19] どんな正数よりも大きい自然数が存在することは一つの公理である．これによって実数から無限大と無限小を排除する．**アルキメデスの公理**と呼ぶ．

証明の基本 5 帰納法の考え方はこのように数列を定めるような場合にも使われる．よく使われる手法なので自分でも使えるようにして欲しい．

定理 3.7 (Bolzano-Weierstrass の定理)**.** 有界な数列 $\{a_n\}$ は収束する部分列を持つ．

証明. 集積点を見つければよい．$\{a_n\}$ は有界なのでその台集合には上限及び下限が存在する．それを $K = \inf\{a_n\}$, $L = \sup\{a_n\}$ とおく．実数 r について

$$N_r = \{n \mid r > a_n\}$$

と定めるとき $r > L$ ならば $N_r = \mathbb{N}$, $r < K$ ならば $N_r = \emptyset$ である．そこで

$$A = \{r \in \mathbb{R} \mid N_r \text{は無限集合}\}$$

とおけば，A は下に有界な集合になる．そこで $\inf A = \alpha$ とおく．$A \supset (L, \infty)$ より $\alpha \leqq L$, $A \cap (-\infty, K) = \emptyset$ より $\alpha \geqq K$ である．さて $\varepsilon > 0$ について

$$M_\varepsilon = \{n \mid \alpha - \varepsilon \leqq a_n < \alpha + \varepsilon\}$$

とおく．$\alpha + \varepsilon$ は A の下界ではないので，$0 < c < \varepsilon$ で $\alpha + c \in A$ となるものが存在する．また $\alpha - \varepsilon$ は下限より小さいので A に属さない．また定義から

$$M_\varepsilon = (N_{\alpha+\varepsilon} - N_{\alpha-\varepsilon}) \supset (N_{\alpha+c} - N_{\alpha-\varepsilon})$$

であるが，これは無限集合から有限集合を除いたものなので無限集合になる．ゆえに，α は $\{a_n\}$ の集積点である[*20]． □

数列 $\{a_n\}$ が **Cauchy 列**であるとは次が成り立つことを言う．

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N, \qquad n, m \geqq N \Longrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

収束性の定義と似ており，収束する数列が Caushy 列であることは $|a_n - a_m| \leqq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m|$ より簡単に証明できる．重要なのはこの逆が成り立つことである．

定理 3.8 (実数の完備性)**.** Cauchy 列は収束する．

証明. 1. まず Cauchy 列が有界であることを示す．
Cauchy 列の定義で $\varepsilon = 1$ とおいて $N \in \mathbb{N}$ を

$$n, m \geqq N \Longrightarrow |a_n - a_m| < 1$$

が成り立つようにとる．特に，$n \geqq N$ について $|a_n| \leqq |a_N| + |a_n - a_N| < |a_N| + 1$ が成り立つ．そこで

$$K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$$

とおけば，すべての n について $|a_n| \leqq K$ が成立する．
2. 次に Cauchy 列が収束することを示す．
Bolzano-Weierstrass の定理により，α に収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ が存在する．$\forall\varepsilon > 0$ について $\{a_{n_k}\}$ が α に収束することから

$$\exists N_1, \quad k \geqq N_1 \Longrightarrow |a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

*20 M_ε の定義は左の不等号が $\leqq$ になっているので集積点の定義の形とはずれている．しかし，ε が任意なのでこのずれは問題にならない．各自考えてみよ．

また，$\{a_n\}$ が Cauchy 列であることから

$$\exists N_2, \quad m, n \geqq N_2 \Longrightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ここで $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおけば，$k \geqq N \Longrightarrow n_k \geqq N$ が成り立つので

$$k \geqq N \Longrightarrow |a_k - \alpha| \leqq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$$

を得る．$\{a_n\}$ は α に収束する． □

3.4 級数の収束判定

数列が収束することは Cauchy 列であることと同値なので，収束するか否かを判定するには Cauchy 列の条件を満たすか否かを考えれば良い．この意味で Cauchy 列の定義

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N, \qquad n, m \geqq N \Longrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

を **Cauchy の収束判定条件**と呼ぶ．特に級数の収束判定に有効なので，級数の収束（すなわち部分和の定める数列の収束）に書き直しておく．

命題 3.9. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n$ [*21]が収束するためには次が成り立つことが必要十分である．

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ N < m < n \Longrightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon$$

$m = n - 1$ とすれば $N + 1 < n \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$ となるので次を得る．

命題 3.10. $\sum a_n$ が収束すれば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．[*22]

命題 3.11. 級数 $\sum a_n$ に対して数列 $\{M_n\}$ で

$$\exists N_0, \quad n \geqq N_0 \Longrightarrow |a_n| \leqq M_n \qquad \sum M_n \text{は収束}$$

を満たすものが存在するとき $\sum a_n$ も収束する．

証明. $\sum M_n$ は収束するので Cauchy の収束判定条件を満たす．$\forall\varepsilon > 0$ に対して $\sum M_n$ が Cauchy の収束判定条件を満たすことから定まる N を N_0 よりも大きくとれば

$$N < m < n \Longrightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| \leqq |M_{m+1} + M_{m+2} + \cdots + M_n| < \varepsilon$$

を得る．ゆえに $\sum a_n$ も Cauchy 列である． □

例題 4. 数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r < 1$ を満たせば $\sum a_n$ は収束することを示せ．

解答. $\varepsilon < (1 - r)/2$ について，極限の定義により

$$\exists N, \quad n \geqq N \Longrightarrow |\sqrt[n]{|a_n|} - r| < \varepsilon$$

が成り立つ．ここで $\sqrt[n]{|a_n|} < r + \varepsilon < (1 + r)/2$ より $(1 + r)/2 = c < 1$ について

$$n \geqq N \Longrightarrow |a_n| < c^n$$

が成り立つ．$0 < c < 1$ より $\sum c^n$ は収束するので $\sum a_n$ も収束する． □

[*21] 以下，単に $\sum a_n$ と書く．

[*22] この逆は成り立たない．例えば $\sum(1/n)$ など．

問題集 3

問 3.1 次の集合の上限・下限を求めよ．またそれは最大・最小になるか調べよ．

$$A = [0, 1) \qquad B = \{e^{-x} \mid x \in \mathbb{N}\} \qquad C = \left\{ \frac{1}{m} + (-1)^n \frac{1}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

問 3.2 $\lim_{n\to\infty} a_n = b \iff \lim_{n\to\infty} |a_n - b| = 0$ を示せ．

問 3.3 収束する数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ について $\forall n,\ a_n \leqq b_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$ を示せ．また，$\forall n,\ a_n < b_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ は成立するか．

問 3.4 $\sum |a_n|$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束することを示せ．この仮定が成り立つとき $\sum a_n$ は**絶対収束**するという．

問 3.5 数列 $\{a_n\}$ について $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r < 1$ が成り立つとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．また，$\sum a_n$ は収束することを示せ．

問 3.6 k を整数とする．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n$ は $|x| < 1$ のとき収束し，$|x| > 1$ のとき発散することを示せ[*23]．

問 3.7 $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ とおく．$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ．（ヒント；2 項定理を利用せよ．）

4 連続関数

4.1 関数の極限

関数の極限は次のように定義する．

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \overset{\text{def}}{\iff} 『\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \quad (0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)』$$

ここで，$0 < |x - a|$ となっていることに注意せよ．$f(a)$ は b に近い必要は無い．また，$f(x)$ の定義域が $0 < |x - a| < \delta$ を満たす，x を含まないときは極限は考えない．次の命題は基本的である．

命題 4.1. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ は次が成り立つことと同値である．

f の定義域内の数列 $\{x_n\}$ が，$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ と $x_n \neq a$ を満たすならば，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ が成り立つ．

証明. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ とし, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ と $x_n \neq a$ を満たす数列 $\{x_n\}$ をとる．$\forall\varepsilon > 0$ について $\lim_{x\to a} f(x) = b$ の定義から定まる $\delta > 0$ をとる．

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

この $\delta > 0$ について $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ の定義から定まる自然数 N をとる．

$$n \geqq N \Longrightarrow |x_n - a| < \delta$$

ここで $x_n \neq a$ の仮定から $0 < |x_n - a| < \delta$ であり二つの主張を合わせて

$$n \geqq N \Longrightarrow |f(x_n) - b| < \varepsilon$$

を得る．これは $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ を意味する．

[*23] $|x| = 1$ の場合の収束発散は次のように整理できる．
（a）$k \geqq 0$ の場合は命題 3.10 により発散する．
（b）$k \leqq -2$ の場合は x^k の $[1, \infty)$ 上での広義積分と比較することにより絶対収束することが分かる．
（c）$k = -1$ の場合は $x = 1$ では x^{-1} の $[1, \infty)$ 上での広義積分との比較により発散することが示せる．$x = -1$ のとき，すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$ は $\log(1 + x)$ に対する Taylor の定理から $-\log 2$ に収束することが示せる．

逆に $\lim_{x\to a} f(x) = b$ が成立しなかったとする．これは

$$\exists\varepsilon > 0,\ \forall\delta > 0,\ \exists x,\ 0 < |x - a| < \delta,\ \text{かつ}\ |f(x) - b| \geqq \varepsilon$$

という内容になる．そこで，各自然数 n について $\delta = 1/n$ として

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n},\ \text{かつ}\ |f(x_n) - b| \geqq \varepsilon$$

となるように x_n をとれば，数列 $\{x_n\}$ は $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ と $x_n \neq a$ を満たすが $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ は満たさない． □

この命題により，数列に関する和，差，積，商の極限の公式から関数の極限に関する公式を導くことができる．

定理 4.2. $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ のとき次が成り立つ．

$$\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \alpha \pm \beta, \qquad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$$

が成り立つ．さらに $\beta \neq 0$ のときは

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立つ．

証明. 積の極限の公式

$$\lim_{x\to a} f(x) = b\ \text{かつ}\ \lim_{x\to a} g(x) = c \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc$$

について示そう．$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ と $x_n \neq a$ を満たす数列 $\{x_n\}$ をとれば命題 4.1 より

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b\ \text{かつ}\ \lim_{n\to\infty} g(x_n) = c$$

が成り立つ．定理 3.4 の数列の積の極限についての公式を使えば

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = bc$$

を得る．この式はすべての $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ と $x_n \neq a$ を満たす数列 $\{x_n\}$ について成り立つので命題 4.1 より

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc$$

を得る．他の主張も同様に証明できる． □

4.2　関数の連続性

$f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つことを言う．すなわち

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\quad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

ここで $0 < |x - a|$ としていないが，$x = a$ のときは $|f(x) - f(a)| = 0$ となるからだ．この定義を使うと具体的な関数の連続性を確認することができる．

命題 4.3. 次の関数は連続である．

$$\text{定数関数},\quad x,\quad e^x,\quad \log x\,(x > 0),\quad \sqrt[k]{x}\,(x > 0),\quad \sin x,\quad \cos x,$$

$$\sin^{-1} x\,(-1 \leqq x \leqq 1),\quad \cos^{-1} x\,(-1 \leqq x \leqq 1),\quad \tan^{-1} x$$

証明. $f(x) = e^x$ について示そう.

$$|f(x) - f(a)| = |e^x - e^a| < \varepsilon \Longleftrightarrow e^a - \varepsilon < e^x < e^a + \varepsilon \Longleftrightarrow \log(e^a - \varepsilon) < x < \log(e^a + \varepsilon)$$
$$\Longleftrightarrow \log(1 - \varepsilon e^{-a}) < x - a < \log(1 + \varepsilon e^{-a})$$

より $\delta \leqq \min\{-\log(1 - \varepsilon e^{-a}), \log(1 + \varepsilon e^{-a})\} = \log(1 + \varepsilon e^{-a})$ ととれば

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つ. 他の関数については各自やってみること. □

基本的な関数の連続性と次の定理から連続性を示すことができる.

定理 4.4. 連続関数の和, 差, 積は連続である. 連続関数の商は分母 = 0 を除いて連続である[*24]. また, 連続関数の合成も連続である.

証明. 和, 差, 積, 商については極限に関する公式(定理 4.2)から直接導ける. 合成関数の連続性については次のように証明される.

$y = f(x)$ が $x = a$ で連続であり, かつ $z = g(y)$ が $y = b = f(a)$ で連続であるとする. $\forall\varepsilon > 0$ に対して g の連続性から $\delta_1 > 0$ を

$$|y - b| < \delta_1 \Longrightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon$$

が成り立つように取る. この $\delta_1 > 0$ に対して f の連続性から $\delta > 0$ を

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_1$$

が成り立つようにとる. $y = f(x)$, $b = f(a)$ に注意すれば $|x - a| < \delta$ のとき

$$|g \circ f(x) - g \circ f(a)| = |g(f(x)) - g(f(a))| = |g(y) - g(b)| < \varepsilon$$

となるので $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = g \circ f(a)$ が成立し $g \circ f$ は $x = a$ で連続になる. □

連続の定義において $0 < |x - a| < \delta$ ではなく $|x - a| < \delta$ になっていることで議論がうまくいく. $g(y)$ が $y = b$ で連続でない場合は $\lim_{y\to b} g(y) = c \Longrightarrow \lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$ は一般には成り立たない. $x \neq a$ だとしても $f(x) \neq b$ とは限らないからだ.

以上の議論から一つの式で与えられた関数の連続性は簡単に示すことができる.

例題 5. $f(x) = x^{x^2+1} \sin\left(\dfrac{x}{x^2 + x + 1}\right)$ の連続性を考察せよ.

解答. $x^{x^2+1} = e^{(x^2+1)\log x}$ であり, この関数の定義域は $(0, \infty)$ である. これは 1, x, $\log x$, e^x の和, 積, 合成で記述されるので定理 4.4 より連続である. 同様に $\sin\left(\dfrac{x}{x^2 + x + 1}\right)$ も 1, x, $\sin x$ の和, 積, 商(分母は判別式負の二次式なので 0 にならない), 合成で記述されているので連続である. ゆえに $f(x)$ は連続関数の積であり連続である. なお定義域は $(0, \infty)$ である. □

関数が, 一つの式の形で与えられていないときは, 連続性の定義に従って考察しなければならない.

例題 6. 次の関数の連続性を考察せよ.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

[*24] 分母が 0 となるところで不連続であるという表現をすることもあるが, 定義されないが正確である. 連続か否かは関数が定義されている点でのみ考える.

解答. $a \neq 0$ なる a においてはその周りで一つの式で表されているので連続である. 0 での連続性は $x \neq 0$ について $|f(x)| \leqq |x|$ に注意すれば

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

を得る. ゆえに $x = 0$ においても連続である. □

連続性が明確に定義されたことにより, 直感では理解しがたい事実も明らかになる. 重要なのは直感ではなく論理であることを再確認して欲しい.

例題 7. 関数 $f(x)$ を x が有理数のときは

$$f(x) = \frac{1}{p}, \qquad \text{ただし, } x \text{ は既約分数として} \frac{q}{p},\ p \in \mathbb{N} \text{ と表されているとする.}$$

と定める. x が無理数のときは $f(x) = 0$ と定める. このとき $f(x)$ は, 有理数では不連続, 無理数では連続であることを示せ.

解答. a が有理数 $a = q/p$ のとき $a_n = a + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ は無理数である. $f(a_n) = 0$ と $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = 0 \neq f(a) = \frac{1}{p}$$

であり $f(x)$ は a において不連続である.

a が無理数とする. $\varepsilon > 0$ にたいして自然数 N を $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$ となるように取る. また M を $1, 2, 3, \ldots, N$ の最小公倍数とする. Ma を越えない最大の自然数を k とする. $k < Ma < k + 1$ より

$$a \in \left(\frac{k}{M}, \frac{k+1}{M} \right) = I$$

である. さて分母が N 以下の有理数は, 分母が M の分数で記述できるので I 内には存在しない. ゆえに I 内の有理数 x については

$$f(x) < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

なので $\delta \leqq \min\{a - k/M, (k+1)/M - a\}$*25 ととれば

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow x \in I \Longrightarrow |f(x) - f(a)| = f(x) < \varepsilon$$

が成り立つ. ゆえに a において連続である. □

4.3 連続関数の性質

この節では, 連続関数の基本的な性質の証明を行う.

定理 4.5 (中間値の定理)**.** 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上連続で $f(a) < f(b)$ を満たすとする. このとき,

$$\forall \gamma \in (f(a), f(b)), \quad \exists c \in (a, b), \quad f(c) = \gamma$$

証明. $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < \gamma\}$ とおく. $a \in A$ であり, b は A の上界なので $c = \sup A$ が存在する. 自然数 n について $\gamma - \frac{1}{n}$ は A の上界ではないので $a_n \in A$ を

$$c - \frac{1}{n} < a_n \leqq c$$

*25 a から区間 I の両端までの距離である.

となるようにとることができる．$\lim_{n\to\infty} a_n = c$ および c での連続性から $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ であるが $f(a_n) < \gamma$ なので $f(c) \leqq \gamma$ を得る．

$f(c) \leqq \gamma < f(b)$ より $c < b$ である．$r > 0$ を $c + r < b$ となるようにとれば $b_n = c + r2^{-n}$ について $b_n \in [a, b]$ および $b_n \notin A$ が成り立つ．$f(b_n) \geqq \gamma$ および $\lim_{n\to\infty} b_n = c$ より $f(c) \geqq \gamma$ を得る．以上から，$f(c) = \gamma$ が成り立つ．c は a, b と一致しないので，$c \in (a, b)$ である． □

定理 4.6. 閉区間上連続な関数は最小値及び最大値を持つ．

証明. $f(x)$ は $[a, b]$ 上連続であるとする．ここで $f(x)$ は上に有界でないと仮定してみる．各自然数 n について n は $f(x)$ の上界ではないので

$$\exists x \in [a, b], \quad f(x) > n$$

を満たす．そのような x を一つとり a_n とおく．数列 $\{a_n\}$ は有界なので収束する部分列が存在する．それを $\{a_{n_k}\}$ とおけば，$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = c \in [a, b]$ である．$f(x)$ は c で連続なので

$$\lim_{k\to\infty} f\left(a_{n_k}\right) = f(c)$$

であるが，これは $f\left(a_{n_k}\right) > n_k$ に矛盾する．ゆえに $f(x)$ は有界であり，$M = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$ が存在する．

自然数 n について $M - \frac{1}{n}$ は $f(x)$ の上界ではないので

$$\exists x \in [a, b], \quad M - \frac{1}{n} < f(x) \leqq M$$

を満たす．そのような x を一つとり a_n とおく．数列 $\{a_n\}$ は有界なので収束する部分列が存在する．それを $\{a_{n_k}\}$ とおけば，$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = c \in [a, b]$ である．$f(x)$ は c で連続なので

$$\lim_{k\to\infty} f\left(a_{n_k}\right) = f(c)$$

であるが，$M - \frac{1}{n_k} < f\left(a_{n_k}\right) \leqq M$ なので，$f(c) = M$ となる．ゆえに，関数 $f(x)$ は $x = c$ において最大値 M をとる． □

4.4 連続関数の逆関数

区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ について，最大値を M，最小値を m とおけば $f([a, b]) = [m, M]$ である[*26]．さらに単射であれば逆関数 $f^{-1} : [m, M] \longrightarrow [a, b]$ が存在する．

定義域内の任意の 2 点 $x_1 < x_2$ について $f(x_1) \leqq f(x_2)$ が常に成り立つとき f は**単調増加**であるという．さらに $f(x_1) < f(x_2)$ が常に成り立つときは**狭義単調増加**であるという．同様に，**単調減少**，**狭義単調減少**も定義できる．

定理 4.7. 区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ について，
(1) f が単射であることと狭義単調増加または狭義単調減少であることとは同値である．
(2) f が狭義単調のとき逆関数 f^{-1} は連続である．

証明. (1) 狭義単調増加のときに単射であることは $f(x_1) < f(x_2)$ より $f(x_1) \neq f(x_2)$ であるので明らかである．逆に f が単射であるとする．
(1-1) 最大値を区間の両端で取ること

最大値 M を区間の内部の点 c で取ったとする．$a < c < b$，$f(a) < f(c)$，$f(b) < f(c)$ である．α を $(\max\{f(a), f(b)\}, f(c))$ にとると，中間値の定理により $f(x) = \alpha$ となる点が (a, c) と (c, b) のそれぞれの区間に

[*26] 最大値と最小値の間にある値が $f(x)$ の値として実現できることは中間値の定理で保障されている．

存在する．これは単射性に矛盾する．

(1-2) 狭義単調であること

簡単のため $f(b) = M$ とする．$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ について $f(x_1) > f(x_2)$ であったとする．$f(x_2)$ は最大値ではないので $x_2 < b$ であり，$x_1 < x_2 < b$ と $f(x_1) > f(x_2) < f(b)$ が成り立つ．α を $(f(x_2), \min\{f(x_1), f(b)\})$ にとると，中間値の定理により $f(x) = \alpha$ となる点が (x_1, x_2) と (x_2, b) のそれぞれの区間に存在する．これは単射性に矛盾する．ゆえに常に $f(x_1) < f(x_2)$ であり狭義単調増加になる．$f(a) = M$ の場合は同様な議論で狭義単調減少になる．

(2) 簡単のため f は狭義単調増加であるとして議論する．$f^{-1}(\gamma) = c$ すなわち $f(c) = \gamma$ とおく．$\varepsilon > 0$ について

$$c - \varepsilon < x < c + \varepsilon \Longrightarrow f(c - \varepsilon) < f(x) < f(c + \varepsilon)^{*27}$$

が成り立つので $0 < \delta \leqq \min\{\gamma - f(c - \varepsilon), f(c + \varepsilon) - \gamma\}$ と δ をとれば

$$|y - \gamma| < \delta \Longrightarrow f(c - \varepsilon) < y < f(c + \varepsilon) \Longrightarrow c - \varepsilon < f^{-1}(y) < c + \varepsilon$$

となるので $|f^{-1}(y) - f^{-1}(\gamma)| < \varepsilon$ となり $f^{-1}(y)$ は $y = \gamma$ で連続である． □

問題集 4

問 4.1 連続性の定義に従って $f(x) = \log x$ が $x = a > 0$ で連続であることを示せ．

問 4.2 次の関数の連続性を調べよ．

$$f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \text{ のとき} \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

問 4.3 関数 $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ と正数 L について

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b), \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leqq L|x_1 - x_2|$$

が成り立っているとする．$f(x)$ は連続であることを示せ．また，$\lim_{x \to b-0} f(x)$ は収束することを示せ．

5　この講義内容と微分積分との関連（付録）

関数の極限の定義は，微分係数の定義に使われており，この講義で扱った事項は微分積分学の基礎に位置づけられる．講義資料の付録としてこの講義内容と微分積分との関わりを簡単に述べておく．

5.1　Taylor の定理までの論理

まず $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ について $f(a) = f(b)$ であるとき，最大値または最小値の少なくとも一方は内部でとる．ここで内部で微分可能であればその点での微分係数の値は 0 である．

定理 5.1 (ロルの定理)**.** $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ が $[a, b]$ 上連続，(a, b) 上微分可能，$f(a) = f(b)$ の条件を満たすとき，$c \in (a, b)$ で $f'(c) = 0$ を満たすものが存在する．

$f(a) = f(b)$ の条件を取り除いたとき，$g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} x$ がロルの定理の仮定を満たすので次を得る．

定理 5.2 (平均値定理)**.** $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ が $[a, b]$ 上連続，(a, b) 上微分可能の条件を満たすとき，$c \in (a, b)$ で

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

*27 $c \pm \varepsilon$ が $[a, b]$ からはずれる場合は，$f(a)$ または $f(b)$ に置き換える必要があるが，議論が煩雑になるので省略する．

を満たすものが存在する．

さらに $f(x)$ が $[a,b]$ で C^{n-1} 級，(a,b) で n 回微分可能なとき

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - K(b-x)^n$$

とおき $g(a) = 0$ になるように K を定めれば g にロルの定理が使える．

$$K = \frac{1}{(b-a)^n}\left(f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}\right)$$

$$g'(c) = -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} + nK(b-c)^{n-1} = 0 \qquad K = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

より

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

を得る．これが Taylor の定理であった．

5.2 積分の性質

連続関数の積分可能性を示すには，閉区間上の連続関数についての議論がもう少し必要になる．これは数理科学プログラムの展開科目「解析概論 I」で学習する．ここでは次の命題のみ示しておこう．

命題 5.3. $f(x)$ が $[a,b]$ 上連続で $f(x) \geqq 0$ を満たしているとする．このとき $\int_a^b f(x)dx = 0$ ならば $f(x)$ は 0 に値をとる定数関数である．

証明. 背理法を用いる．$f(c) > 0$ なる c が存在したとすると，c での連続性から $\varepsilon = \dfrac{f(c)}{2}$ に対して

$$\exists\delta > 0 \qquad |x-c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2}$$

となる．$J = (c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$ において $f(x) > \frac{f(c)}{2}$ となるので，区間 J の幅を r とおけば

$$\int_a^b f(x)dx > \frac{f(c)}{2}r$$

を得る．これは仮定に矛盾する． □