微分積分 I 講義メモ (4 月 9 日)

今日の講義では 1.1 数列と関数の極限および 1.2 連続関数を扱った．いずれも高校で学習しているはずだが，曖昧になっている人は再確認しておいてほしい．今日解説した事項を箇条書きする．

本日の講義の要点

1. 定理 1.2 について (定理 1.6 についても同様)

   高校でも学習している基本的事実だ．ただし (1) で仮定を $a_n < b_n$ の形に変えても $\alpha = \beta$ となる場合もあるので $\alpha < \beta$ としてはいけない．例えば $a_n = 0,\ b_n = 1/n$ のとき $a_n < b_n$ だが $\alpha = \beta = 0$ である．

2. 例題 1.1 について

   一般項を求めなくても極限が厳密に求められる場合がある．テキストと同じ証明を与えたので特に記しておくべき事項はない．

3. 例題 1.2 について

   a_n, a_{n+1} を 2 項定理で展開したときの第 k 項どおしを比較する．

$$ {}_nC_k \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) $$

$$ {}_{n+1}C_k \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n+1-k+1)}{k!}\frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) $$

   右辺で比較すれば a_n よりも a_{n+1} のほうが大きいのは明らかだろう．これによって単調増加であることが示される．

   有界であることは $k \geqq 1$ について $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k \geqq 2^{k-1}$ であることを利用する．後は等比級数の和により $a_n < 3$ を得る．テキストに詳しく証明がついているので読んでおくこと．

4. 例題 1.3 について

   $a > 1$ の場合のみ示した．他の場合はテキストに任せる．証明は $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ とおいてから 2 項定理を利用する．証明の筋道を追うのはそう難しくないだろう．ただし，何故こう置くのか自分ではとても思いつかないというのが実感だろう．ただし，これは別に気にする必要のないことだ．こういう証明上のテクニックは，覚えるものではなく何度も使っているうちに感覚として身につくものだ．くれぐれもこのテクニックを覚えようなどとしないように．

5. 関数の極限の定義について

   極限の定義で注意すべきは $x \to a$ とは $x \neq a$ を前提にしているということだ．ただ x を a に近づけるというのは不正確で x を a 以外の点から x に近づけると理解しておかなければならない．だから講義では気が付かなかったが定理 1.7 は誤りだ.「a に収束するどんな数列 $\{a_n\}$ 」ではなく，「a に収束し $a_n \neq a$ を満たすどんな数列 $\{a_n\}$」としなくてはならない．

6. 連続関数の和・差・積・商・合成の連続性（定理 1.8 と定理 1.9）について

   関数 $f(x)$ の a での連続性を考察するには $f(a)$ が定義されていなければならない．定理 1.8(2) で $g(a) \neq 0$ という条件は $x = a$ において $f(x)/g(x)$ が定義されるための条件である．(2) は定義される範囲で連続だという意味だ．

7. 例題 1.4 と例題 1.5

   例題 1.5 はどちらも $\lim\limits_{x\to o} f(x) = f(0) = 0$ が成り立つか調べることが課題である．ここで極限の定義から $x \neq 0$ なので，$f(x) = \sin(1/x),\ f(x) = x\sin(1/x)$ と表して良いことになる．すると (1) は例題 1.4 と同じになり極限は存在しないので不連続である．(2) は sin の取る値は -1 から 1 までなので，

$-|x| \leqq x\sin(1/x) \leqq |x|$ が成り立つ．これから 0 に収束することが導かれるので連続である．

本日のレポート課題とヒント

演習問題の 1.1.1，1.1.3，1.2.1，1.2.4 を課題とする．提出締め切りは 4 月 14 日 (火) の昼休み，提出場所は教養科目等事務室（全学教育棟 A 棟 4 階）の前にレポート提出箱があるのでそこに入れること．授業科目名と担当教員名を確認して入れ間違えが無いようにしてほしい．

締め切りに遅れた場合は研究室（理学部 3 号館 4 階 D416）まで持ってきてほしい．締め切りにはたいした意味があるわけではないので受け取る．ただし，添削の都合上，あまり授業の直前に持ってこられてもたいおうできない．やはり締め切りは守ってほしい．

ヒントを与えておこう．

- 1.1.1 は分母が 1 の分数式とみて，分子分母に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ をかけてみると良い．高校数学でも扱う分子の有理化のテクニックと同じだ．
- 1.1.3 は $\sqrt[n]{n} > 1$ は明らかなので $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ とおく．例題 1.3 の議論を少し修正して考えれば良い．
- 1.2.1 は (1) は $x = 1$ で連続になるように a を定めよということだ．右極限と左極限を調べそれが一致するための a の条件を求めること．
- 1.2.4 は $f(x) - x$ という関数に中間値の定理を使う．この関数が $[a, b]$ の両端で符号が変わるならば，中間の値 0 をとる点の存在が分かる．$f(c) - c = 0$ より不動点の条件 $f(c) = c$ を満たす．

来週の事前学習

1.3 節の初等関数を扱う．微分の定義は高校で学習済みなので p.22 の微分まで進むかもしれない．微分（高校での数学 III 程度）の基本的計算法が曖昧という人は復習しておくこと．