微分積分 I 講義メモ (4 月 16 日)

前回のレポート課題

少し（かなり）難しい問題があったので 4 月 9 日の講義メモにヒントを記述しておいた．ヒントを使わずに解答した人もいるが，講義メモは見ているのだろうか．講義メモは復習（家庭学習）の題材として提供しているものなので，きちんと読んでからレポートに取り組むようにしてほしい．レポート課題の解答例とコメントをまとめておく．

1.1.1　分子分母に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ をかけて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sqrt{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+2/n}}{\sqrt{1+1/n}+1}=\frac{1}{2}$$

【コメント】

- 高校数学の知識で十分できる問題だ．分子分母に $\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\sqrt{n+2}$ をかけた人もいるが解答例のほうが分かりやすい．
- きちんと計算できているのに極限を 1 にしてしまう人が散見する．ケアレスミスだ．

1.1.3　$\sqrt[n]{n}=1+h_n$ とおくと $\sqrt[n]{n}\geqq 1$ より $h_n\geqq 0$ である．よって $n\geqq 2$ について

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2+\cdots+(h_n)^n>\frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2$$

が成り立つ．これより $0\leqq h_n<\sqrt{2/(n-1)}$ が得られるので，$n\to\infty$ のとき $h_n\to 0$ となる．よって $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ である．

【コメント】

- 例題 1.3 とほぼ同じ方法だが，$n>nh_n$ としてしまうと失敗する．2 項定理を使った後その第 3 項を利用するのがポイントだ．
- この問題をヒントの方法以外で正解に至った人が一人だけいた．高校までの知識でも解ける問題だ．しかし，ノーヒントで解くのはやはり難しい．講義メモにヒントを書いているのでそれを確認してほしい．

1.2.1　(1) は $x=1$ で連続になるように a を定めれば良いので

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}x^2=1,\qquad \lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1^0}ax-3=a-3$$

の値が等しければよい．$1=a-3$ より $a=4$ だ．(2) も同様にできるので省略する．

【コメント】

- この問題は易しいしよくできていた．一人だけ右微分係数と左微分係数で考えた人がいたが，つまらないミスだ．

1.2.4　$g(x)=f(x)-x$ とおくと $a\leqq f(x)\leqq b$ より $g(a)=f(a)-a\geqq 0$ および $g(b)=f(b)-b\leqq 0$ を得る．ここで $g(a)=0$ の時は $f(a)-a=0$ より a が不動点になっている．同様に $g(b)=0$ のときは b が f の不動点になる．$g(a)>0$ かつ $g(b)<0$ のときは中間値の定理により $g(c)=0$ となる c（$a<c<b$）が存在する．この c について $g(c)=f(c)-c=0$ なので f の不動点になる．

【コメント】

- 証明問題なので難しかっただろう．なお，中間値の定理は $f(a)<k<f(b)$ を満たす k について記述している（定理 1.10）ので，$g(a)\leqq 0\leqq g(b)$ の条件のもとに $g(c)=0$ となる c があるという形で

は使えない．解答例では $g(a) = 0$ の場合と $g(b) = 0$ の場合を別に扱って中間値の定理に帰着している．ただし，除外された場合はむしろ簡単なので（$c = a$ または $c = b$ とおけばよい）特に言及していなくても正解にした．

- $f(x) = x$ の解とは $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x$ の交点の x 座標だ．条件からグラフは正方形 $[a, b] \times [a, b]$ の内部にあり，左辺から右辺への連続曲線になる．これが対角線 $y = x$ と交わるということだ．

本日の講義の要点

1. 双曲線関数
　この授業での新しい関数としてまず双曲線関数を導入した．p.13 に読み方も含めて定義が記述してあるので確認しておくこと．なおこの関数は三角関数と非常によく似た性質を持つ．p.14 の公式，p.22 の導関数も三角関数の対応する性質と比べて理解しておくと良い．
2. 逆三角関数
定義は p.15 にグラフは図 1.7 に記述してある．定義を式としてだけではなく
　　$\sin^{-1} x$ とはサインをとると x になる値のうち $-\pi/2$ と $\pi/2$ の間にあるもの
と言葉で覚えておくように．これを理解しておけば例題 1.7 は簡単に解けるだろう．
例題 1.8 について講義では三辺の長さが $5, 12, 13$ の直角三角形を書いて考察した．$\cos^{-1} 5/13$ とは長さ 5 の辺と斜辺（長さ 13 の辺）に挟まれた角度であり，その角度のサインは $12/13$ である．テキストの解答は図に頼ることなく，$\sin\theta \geqq$ を述べてから，$\sin\theta \geqq 0$ を示しその後で $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ を利用した．
例題 1.9 はテキストの証明と同じ形で解説したのでここでは省略する．
3. 逆三角関数の導関数
p.22 にまとめられている．なお講義で言及しなかったが $\sin^{-1} x$ は $-1, 1$ の 2 点で微分不可能である．テキストのように $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ という条件を付けるべきだった．
4. 初等関数
テキストでは初等関数は節のタイトルにはなっているが言葉の意味には触れられていない．実は今まで学習した関数（多項式，無理式，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数）たちの加減乗除・合成で得られる関数が初等関数である．要するに一つの式で表示できる関数はみな初等関数である．
初等関数の基本となる関数はみな定義域で連続なので定理 1.8 および定理 1.9 を使えば初等関数はみな定義域で連続である．このような関数が微分計算，積分計算の対象である．
5. 微分
微分可能の定義は高校の教科書にきちんと記述されている．しかし，微分可能の定義を尋ねると答えられる学生は殆んどいない．微分の定義など知らなくても微分計算ができるので，微分計算の練習をしているうちにいつしか定義を忘れてしまう．困ったものだ．
しかし，微分計算で導関数が求められるのは初等関数の場合だけだ．例えば

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とおくとき，$f(x)$ は 0 の周りで一つの式で表せていない．だから $f'(0)$ を求めるのに微分計算は使えな

い．定義に戻って考えるしかない．

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin(1/x)$$

より例題 1.5(2) から $f'(0)$ が得られる．

本日のレポート課題とヒント

逆三角関数に関する問題 1.3.1，1.3.2(1)，1.3.3(1) をレポート課題にする．提出締め切りは 4 月 21 日 (火)12 時半で提出場所は先週と同じにする．

ヒントだが 1.3.1 はノーヒントでいいだろう．逆三角関数の定義を知っているかという程度の問題だ．1.3.2(1) は $\alpha=\tan^{-1}\sqrt{5}$ を作図してみると良い．その上で両辺の cos をとってみよ．1.3.3(3) は両辺の tan をとる．後は例題 1.9(1) を参考に取り組むと良い．

来週の事前学習

来週は微分計算や高次導関数，テイラーの定理などを解説する．数学 III で学習したことを思い出しておくように．