微分積分 I 講義メモ (4 月 23 日)

前回のレポート課題

今回の問題は逆三角関数に関するものだけだった．馴染みのない関数なので早く慣れるようにしてほしい．

1.3.1　逆三角関数の値を求める問題，定義を意識して考えること．解答はテキストにあるのでここでは省略する．【コメント】

- $\tan^{-1} x$ が $\tan$ をとると x になる値（角度）のことだということは理解できている．しかし，そのような角度のうち $-\pi/2$ から $\pi/2$ の間の値だということを忘れている．$\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ を $2\pi/3$ としてしまうとこの範囲から外れるので間違いだ．

1.3.2(1)　$\tan^{-1}\sqrt{5}$ とは $\tan$ が $\sqrt{5}$ になる角度で $-\pi/2$ から $\pi/2$ の間にあるものである．すなわち隣辺の長さ 1，対辺の長さ $\sqrt{5}$ の直角三角形の角度である．斜辺の長さは $\sqrt{6}$ なのでこの角度についての $\cos$ の値は $1/\sqrt{6}$ である．ゆえに

$$x = \cos\tan^{-1}\sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

【コメント】

- この問題は図を書いて考察するのが分かりやすいと思う．このプリントでは作図を書くのが面倒なので文章により記述したが作図による考察と同じ内容である．
- 作図によらない解答を記述しておく．
  $\alpha = \tan^{-1}\sqrt{5}$ とおく．条件 $\cos^{-1} x = \tan^{-1}\sqrt{5} = \alpha$ と $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ より $x = \cos\alpha > 0$ である．ゆえに
  $$x = \cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

1.3.3(1)　$\theta = \sin^{-1} x$ とおくと $\sin\theta = x$ および $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ が成り立つ．仮定より $-1 < x < 1$ なので $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ である．ゆえに $\cos\theta > 0$ であり $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$ が成り立つ．ゆえに $\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ である．ここで再び $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ を考慮すれば $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ を得る．
【コメント】

- 議論を $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ から始める人が多い．しかしこれでは示したい式を仮定したことになり証明にならない．気をつけてほしい．
- $\tan\theta = \alpha$ から $\theta = \tan^{-1}\alpha$ は出てこない．$-\pi/2 < \theta < \pi/2$ を確認することが必要である．証明の中にこの不等式が記述されていても，実際に使う場合にはその都度きちんと言及してほしい．

本日の講義の要点

1. 初等関数の微分計算
   初等関数（基本的な関数の一つの式で表される関数）は定理 2.2，定理 2.3(1) という微分法の公式と 21 ページと 22 ページの基本的な関数の導関数によって計算できる．高校では合成関数の微分は簡単な関数にしか扱わないことになっているが大学の数学ではそのような制約は一切設けない．難しいことではないので自分で計算しておくように．
2. 対数微分
   対数をとると積は和に冪は積に変わるので計算しやすくなる．例題 2.1 は簡単なので見ておいて欲し

い．講義では $y = x^{\sin x}$ の微分を対数微分で計算した．

$$\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \log x, \quad \frac{y'}{y} = \cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \quad y' = \cos x \log x x^{\sin x} + \sin x x^{\sin x - 1}$$

講義のときとは整理の仕方が違うが，第 2 項は x^α の微分のようで興味深い．

対数微分の応用として積の微分法則の一般化を解説した．テキストには記述してないので補っておく．

n 個の正値関数 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ について，その積 $y = f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ の微分を対数微分で計算する．

$$\log y = \sum_{k=1}^{n} \log f_k(x) \quad \frac{y'}{y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{f_k(x)} \quad y' = \sum_{k=1}^{n} f_1(x)\ldots f_{k-1}(x)f_k'(x)f_{k+1}(x)\ldots f_n(x)$$

要するに各 f_k を微分した項を足し合わせればよい．

対数をとるためには各関数が正でないと取れないが，結果的に得られた式は値の条件なしに成立している．このことは結果だけ覚えておいてほしい．講義で扱った例を書いておこう．

$$\begin{aligned}(\sin x e^x (x^2-1)\cos^{-1} x)' &= \cos x e^x (x^2-1)\cos^{-1} x + \sin x e^x (x^2-1)\cos^{-1} x \\ &\quad + \sin x e^x (2x)\cos^{-1} x + \sin x e^x (x^2-1)\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

3. 高次導関数

$f(x)$ を n 回微分して得られる関数を n 次導関数と呼び $f^{(n)}(x)$ と表す．これに関して p.23 の基本的な関数の高次導関数を解説した．(1) は 2，3 回微分してみれば納得できると思う．(3)(4) は単位円上の速度 1 の運動の速度ベクトルを考えると分かりやすいと思うのだが．納得できなければ $n = 1$ の場合を加法定理で示してあとは数学的帰納法で良い．

次に $\log x$ の n 次導関数を求めた．$(\log x)' = (\log x)^{(1)} = x^{-1}$ より $(\log x)^{(n)} = (x^{-1})^{(n-1)}$ が成り立つので $(x^\alpha)^{(k)}$ の公式が使える．

$$(\log x)^{(n)} = (x^{-1})^{(n-1)} = (-1)(-2)\ldots(-n+1)x^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$$

高次導関数に関連して定理 2.4（ライプニッツの公式）がある．この公式と 2 項定理との類似性を意識しておくこと．証明は与えなかった．講義では p.24 の 2 つ目の例を解説した．テキストを見ておくこと．

本日のレポート課題とヒント

演習問題 2.1（p.25）から 2.1.2（(1) を除く），2.1.3(1)，2.1.4(2) を出題する．来週火曜日の 12 時半までに教養科目等事務室前のレポート提出箱に入れること．

2.1.2 は単なる計算問題だ．この程度はすらすらできてほしい．2.1.3(1) は根号の中身が正（または 0）になる点で考えること．場合分けも必要になるだろう．2.1.4(2) は割り算で分子の次数を下げてから計算すること．$(x+1)^{-1}$ の n 次導関数に帰着できる．

次回は平均値の定理からテイラーの定理まで解説する．いよいよ前半の佳境である．