微分積分 I 講義メモ (4 月 30 日)

前回のレポート課題

微分計算の問題ばかりだがなかなか手ごたえのあるものがそろっている．計算がまだ苦手という人には少しハードかもしれないが，この程度の計算ができなくては微分計算ができるようになったとは言えない．頑張ってほしい．

2.1.2　詳しく計算する．

$$\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x}\right)' = \frac{(\sin x - x\cos x)'(x\sin x + \cos x) - (\sin x - x\cos x)(x\sin x + \cos x)'}{(x\sin x + \cos x)^2}$$
$$= \frac{(x\sin x)(x\sin x + \cos x) - (\sin x - x\cos x)(x\cos x)}{(x\sin x + \cos x)^2} = \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}$$

【コメント】 商の微分法則が使えない人がいるので，最初は商の微分をそのまま使った形で記述した．以下は分子の微分計算だ．

$$\left(\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\left(\tan\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

【コメント】 $(x/2)' = 1/2$ をかけ忘れる人が目につく．合成関数の微分を忘れないように．

$$(x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2})' = \sin^{-1}x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \sin^{-1}x$$

【コメント】 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ での分母の 2 を忘れる人が目につく．

$$\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\tan x\right)\right)' = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}\tan^2 x}\frac{b}{a\cos^2 x} = \frac{ab}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

【コメント】 $(\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$ はこの講義で新たに学習したもっとも重要な導関数だ．確実に覚えておくこと．なお，この程度の式は最後まで整理してほしい．

$$(\tan^{-1}\tanh x)' = \frac{1}{1+\tanh^2 x}(\tanh x)' = \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x + \sinh^2 x}\frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh 2x}$$

【コメント】 双曲線関数については三角関数と累次の公式が成り立つが符号が微妙に変わっているものが多い．覚えようとすると混乱する．なお $(\tanh x)' = \mathrm{sech}^2 x$ と記述する人が多い（テキストにそう書いているから仕方がないが）が意味は分かっているだろうか．実は三角関数は 6 種類あって sin（正弦）cos（余弦）tan（正接）cot（コタンジェント・余接）sec（セカント・正割）cosec（コセカント・余割）という．今の高校では初めの 3 つしか習わない．なお定義は $\cot x = (\tan x)^{-1}$ $\sec x = (\cos x)^{-1}$ $\mathrm{cosec} x = (\sin x)^{-1}$ だ．

2.1.3(1)　対数をとって微分する．

$$\log y = \log\sqrt{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}} = \frac{1}{2}(\log|a+x| + \log|b+x| - \log|a-x| - \log|b-x|)$$

の両辺を微分して

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}\right) = \frac{a}{a^2-x^2} + \frac{b}{b^2-x^2} = \frac{(a+b)(ab-x^2)}{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}$$

よって

$$\left(\sqrt{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}\right)' = \frac{(a+b)(ab-x^2)}{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}\sqrt{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}$$

【コメント】

- 対数をとっても対数法則を使わなかったら意味がない．積は和に，商は差に，冪は積に変わることを徹底的に利用せよ．
- この関数が定義されるためには根号の中身が正でなくてはならない．$a > b > 0$ の条件のもとに正になるのは $x^2 > a^2$ の場合と $b^2 > x^2$ の場合だ．すなわち $(-\infty, -a)$, $(-b, b)$, (a, ∞) の 3 つの区間で定義される．ただこの時，$a \pm x$, $b \pm x$ の正負は定まらない．ゆえに対数法則を使って分けた時は，絶対値をつける必要がある．これは対数微分を利用する際に注意すべき事項だ．しかし

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

と微分すると絶対値が消えてします．$|f(x)|$ とは $f(x)$ に符号をつけたものだが，$-f(x)$ の時でも微分すると分子分母に $-$ がつくので消えてします．結果的に絶対値を無視しても間違えることはない．

2.1.4(2)　$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ なので

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{(n)} = (x)^{(n)} - (1)^{(n)} + ((x+1)^{-1})^{(n)}$$

だ．1 は定数なので 1 回でも微分すれば 0 である．x は 2 回微分すれば 0 になる．ゆえに $n \geqq 2$ について

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{(n)} = ((x+1)^{-1})^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)(x+1)^{-n-1} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$n = 1$ の場合は高校数学の範囲の基本問題なので省略する．

【コメント】

- ヒントに割り算で分子の次数を下げることをアドバイスしたが無視している解答も多い．それでできれば問題ないのだが．講義メモにはレポート課題のヒントも記述しているので，きちんと読んでほしい．
- x^α の n 次導関数を与えたのだから $(x+1)^{-1}$ の n 次導関数も分かるはずだ．そういう感覚を持てるようにしてほしい．

本日の講義の要点

1. 平均値の定理 (p.22 定理 2.6)

　平均値の定理は高校でも学習したはずだがその重要性は十分認識されているとは言い難い．講義では最大値・最小値の存在定理（定理 1.11）→ロルの定理（定理 2.5）→平均値定理（定理 2.6）という証明に至る道筋を簡単に解説した．

- 定理 1.11 →定理 2.5 は，$f(a) = f(b)$ の仮定から最大値または最小値の少なくとも一方は区間の内部でとることを導く．もしどちらも両端でとれば $f(a) = f(b)$ の仮定から最大値と最小値が一致してしまう．すると $f(x)$ は定数関数になるのでいたるところ微分係数は 0 である．よって

$f'(c) = 0,\ (a < c < b)$ である．内部の点 $c,\ (a < c < b)$ で最大値（最小値）をとればその点での微分係数は 0 である．よって $f'(c) = 0$ でありロルの定理が示された．

- 定理 2.5 →定理 2.6 は $f(x)$ から傾き $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ の 1 次式をひいてロルの定理の条件を成り立つようにする．

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad g(b) = f(b) - f(b) + f(a) = g(a)$$

これから $g'(c) = 0$ となる $c,\ (a < c < b)$ が見つかるがこれが平均値の定理の c の条件を満たす．

平均値の定理の応用としてある区間で $f'(x) > 0$ なら単調増加であることを示した．2 点 $x_1 < x_2$ について $[x_1, x_2]$ で平均値定理を使えば[*1]

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad x_1 < c < x_2$$

となる c が存在が分かる． $f'(c) > 0$ より $f(x_1) < f(x_2)$ を得るので単調増加である．

導関数が常に負なら単調減少，導関数が常に 0 なら定数関数であることも同様に証明できる．

2. テイラーの定理（定理 2.8）

定理 2.8 は式が二つ記述されているが第 1 式は R_{n+1} の定義式だと思うこと．そしてこれが第 2 式によって表示されるというのがテイラーの定理の趣旨だ．

$$R_{n+1} = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k$$

が定義式であり

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}, \qquad a < c < b$$

を満たす c が存在するというのが定理の内容だ．なおこの式で $0! = 1$ としており，$k = 0$ のときは $f(a)$ になっている．証明はテキストとは違い，ロルの定理利用した．記述しておこう．

証明　$F(x)$ を

$$F(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b - x)^k - K(b - x)^{n+1}$$

とおく．$F(x)$ は f の n 次導関数までしか使っていないのでもう 1 回微分できる．また $F(b) = f(b) - f(b) = 0$ である．$\sum$ 記号の中の $k = 0$ の項は $f(x)$ であることに注意せよ．

$$F(a) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k - K(b - a)^{n+1} = R_{n+1} - K(b - a)^{n+1}$$

なので $K = R_{n+1}(b - a)^{-n-1}$ とおけば $F(a) = 0$ を得る．よってロルの定理が使え $F'(c) = 0$ となる c が $a < c < b$ の範囲に存在する．

$F(x)$ の微分を $(b - x)^k$ を微分したもの（$k \geqq 1$ でよい）と $f^{(k)}(x)$ を微分したものの和に分ける．

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}k(b - x)^{k-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b - x)^k + (n + 1)K(b - x)^n$$

[*1] このように平均値定理では，適用する区間を自由に選んでよい．それを含む区間で微分可能性が保証されていれば十分である．この事情はテイラーの定理の場合も同様である．

より左のシグマ記号の $k = p + 1$ での式と，右のシグマ記号の $k = p$ での式は同じ形だから符号の違いから和は 0 になる．残るのは右のシグマ記号の $k = n$ の項であり

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + (n+1)K(b-x)^n$$

を得る．$F'(c) = 0$ と K の置き方から

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n + (n+1)R_{n+1}\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(b-c)^n = 0$$

であり

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

を得る．

3. テイラーの定理の書き換え（定理 2.9，p.302 行目の式）

$f(x)$ は $x = a$ の周りで $n+1$ 回微分可能とし，a を固定したまま b を a の周りで自由に動かす．このとき b が a の左に来ても $b < c < a$ となるだけで式の形も証明も全く同じである．b を自由に動かすので x を使う．定理 2.8 の R_{n+1} の定義式は

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x)$$

となる．これは $f(x)$ と n 次多項式（実は n 次近似多項式）の誤差であり x によって異なる値をとる．表示は c ではなく $\theta = \frac{c-a}{x-a}$ を利用して $c = a + \theta(x-a)$ とおく．この工夫により x, a の大小によらず $0 < \theta < 1$ という条件になる．

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

さらに $a = 0$ とすればいわゆるマクローリンの定理になる．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}(x), \qquad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

注意　θ は $0 < \theta < 1$ しか分かっていない．x, n によって当然変わる値である．いや，一つの値に決まるわけでもない．誤解しないように．なお $f^{(n)}(2x)$ と書くと $f^{(n)}(x)$ という関数に $2x$ を代入したという意味だ．$(f(2x))^{(n)}$ と書くと，$f(2x)$ という関数を n 回微分したことになる．1 回微分するたびに 2 が出るので $(f(2x))^{(n)} = 2^n f^{(n)}(2x)$ だ．注意すること．もちろん上の式における $f^{(n+1)}(\theta x)$ は $f^{(n+1)}(x)$ の x を θx に置き換えただけの式だ．

4. 指数関数への適用と応用

$f(x) = e^x$ とすれば $f^{(k)}(x) = e^x$ なので

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k + R_{n+1}(x), \qquad R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

を得る．シグマ記号によらない表示はテキスト p.30 の (1) 式を見ること．この式の応用を 2 つ紹介した．

- n が奇数のときは $x \neq 0$ について $R_{n+1}(x) > 0$ が成り立つ．すなわち次の不等式が得られる．

$$e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \qquad x \neq 0$$

- $n = 3,\ x = 0.1$ として適用すれば

$$e^{0.1} = 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{6} + R_4(0.1) \qquad R_4(0.1) = \frac{e^{\theta 0.1}}{24} 0.0001$$

  $0 < e^{\theta 0.1} < e^{0.1} < 1.2$ を使えば $0 < R_4(0.1) < 0.000005$ なので

$$e^{0.1} = 1.105166 \cdots + R_4(0.1)$$

  より小数点 6 桁目で四捨五入した値が 1.10517 であることが分かる．この値を関数電卓の値と比較してみよ．

本日のレポート課題とヒント

今回は来週の授業まで休みが続くのでレポート課題は出題しない．ただし，微分のもっとも重要な話題に入っているので何をやっているのかきちんと考えておいてほしい．来週はテイラーの定理のさらなる応用を解説する．テイラーの定理は微分の応用を考える際の打ち出の小づちである．