微分積分 I 講義メモ (5 月 7 日)

本日の講義の要点

1. 近似多項式について（テイラーの定理の意味の補足）

　多項式

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_k(x-a)^k + c_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots + c_n(x-a)^n$$

を k 回微分すれば

$$p^{(k)}(x) = c_k k! + c_{k+1}(k+1)k(k-1)\cdots 2(x-a) + \cdots + c_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k}$$

である．特に $0 \leqq k \leqq n$ について $p^{(k)}(a) = c_k k!$ が成り立つ．ゆえにテイラーの定理における多項式部分

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

はその a における k 次（$k \leqq n$）の微分係数がすべて $f^{(k)}(a)$ になる多項式である．感覚的には n 回微分可能ならこの多項式が n 次近似多項式になると思えるが，1 回余分に微分可能性を仮定することによって誤差の表示を与えるのがテイラーの定理（定理 2.9）の意味である．

2. テイラーの定理の応用 (つづき)

　前回の講義ではある種の不等式の証明（誤差の正負を考察した），近似値の計算（具体的な値について，近似多項式の取る値と誤差の大きさを考えることにより近似値を求めた）の 2 つの応用を紹介した．さらに応用例をあげる．

- $f^{(n+1)}(x)$ が a で連続な時

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$

が成り立つ．これを使えば $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_3(x)$（p.30(1) 式で $n = 3$ としている）より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

- $f(x)$ が無限回微分可能で $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ が成り立つとき

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

が成り立つ．これをテイラー展開という．$f(x) = e^x$, $a = 0$ の時は $R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ だが

$$0 < e^{\theta x} < e^{|x|} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$$

【上の極限の証明】$2|x|$ より大きな自然数を一つ選んで $N \geqq 2|x|$ とおけば $n > N$ のとき

$$0 \leqq \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^N}{N!}\frac{|x|}{N+1}\frac{|x|}{N+2}\cdots\frac{|x|}{n} \leqq \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \frac{2^N|x|^N}{N!}\frac{1}{2^n}$$

であるが，N はある定まった自然数なので最後の式は $n\to\infty$ で 0 に収束する．あとは挟み撃ちを使えばよい．

より $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ が成り立つ．ゆえに

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

ここで $x = 1$ を代入すれば次の有名な無限級数の和を得る．

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots$$

3. $f(x) = \sin x$ の場合に考察した．

$$f^{(m)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x & (m = 2k) \\ (-1)^k \cos x & (m = 2k+1) \end{cases}$$

なので $f^{(2k)}(0) = 0,\ f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ である．よって n を $2n$ に書き換えて

$$f(x) = \sin x = \sum_{m=0}^{2n} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} + R_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+1}(x), \quad R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n \cos\theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

この式をシグマ記号を用いずに表せば p.30(2) 式に他ならない．これについても指数関数の場合と同様な応用をが得られる．

- $n = 2, x = 0.1$ とおけば

$$\sin 0.1 = 0.1 - \frac{(0.1)^3}{6} + R_5(0.1), \qquad R_5(0.1) = \frac{\cos 0.1\theta}{120}(0.1)^5$$

 である．最初の 2 項は $0.09983333\cdots$ であり，$0 < R_5(0.1) < \frac{(0,1)^5}{120} < 0.000000084$ なのでおよそ小数点以下第 8 桁で四捨五入した値は 0.0998334 または 0.0998333 である．

- $\sin x = x + R_3(x)$ を用いれば次の周知の極限を求められる．

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-R_3(x)}{x^3} = \frac{-f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{6}$$

- $0 \leqq |R_{2n+1}(x)| \leqq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ より，これは $n \to \infty$ で 0 に収束する．ゆえに

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

4. $\cos x$ の場合とオイラーの公式

$\cos x$ については $\sin x$ の場合とほとんど変わらない．p.30(4) の式を見ておくこと．興味深いのはオイラーの公式である．i を虚数単位として e^x のテイラー展開に ix を放り込む．

$$e^{ix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ix)^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$i^{2k} = (-1)^k$ よりこの式は

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos x + i \sin x$$

となる．この式をオイラーの公式と呼ぶ．ここで $x = \pi$ とした式は $e^{i\pi} + 1 = 0$ と表せる．一つの式に $0, 1, i, e, \pi$ が現れる何とも美しい式である．

本日のレポート課題とヒント

さて，レポート課題として $f(x) = \log(1+x)$ として $a = 0$ でのテイラーの定理を考察してもらう．

(1) $f^{(n)}(x)$ を求めよ．(ヒント：$\log x$ の n 次導関数は 4 月 23 日の講義メモの 3 に解説している． x が $1+x$ になっただけなので分かるだろう．

(2) $a = 0$ としてテイラーの定理を書き下せ．（ヒント：上の結果を使う．$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ を求めるのが基本だが $\frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$ に注意すること．結果は p.30 の (4) 式に記述されている．）

(3) $n = 3$ として $\log 1.1$ の近似値を求めよ．（ヒント：テイラーの定理を $n = 3$ の場合に書き下すこと．さらに $x = 0.1$ を代入すれば $f(0.1) = \log 1.1$ である．）

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ で $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ となることを示せ．（ヒント：$R_{n+1}(x)$ の形を使う．$0 \leqq x \leqq 1$ より $x \leqq 1$ と $1 + \theta x \geqq 1$ が成り立つことに注意せよ．）

授業の終了後に $R_{n+1}(x)$ の表示をそのまま使っていいのかとの質問を受けた．もちろん構わない．というか具体的な関数の場合に定理 2.9 の証明のアイデアを使って $R_{n+1}(x)$ の表示を得るのは大変すぎる．定理 2.9 の証明は抽象的な関数としてやっているから単純なのであって具体的な関数にしたら $f^{(k)}(x)$ の計算を迫られることになり難しすぎる．一般の関数を $f(x)$ とおいて証明することは，具体的な関数の場合をすべて証明したことにつながる．それだけではなく，$f^{(k)}(x)$ の計算から解放されるために，議論がよりシンプルになる．抽象化は分かりづらくしているのではなく分かりやすくしていることに気づいてほしい．