微分積分 I 講義メモ (5 月 14 日)

前回のレポート課題について

$f(x) = \log(1+x)$ として $a = 0$ でのテイラーの定理に関連して次の問題に答えよ．

(1) $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

【解答例】 $f'(x) = (1+x)^{-1}$ なので $n \geqq 1$ について $f^{(n)}(x) = \left((1+x)^{-1}\right)^{(n-1)}$ である．ゆえに

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \log(1+x) & (n=0) \\ (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n} & (n \geqq 1) \end{cases}$$

である．

(2) $a = 0$ としてテイラーの定理を書き下せ．

【解答例】 $k \geqq 1$ のとき $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ である．$k = 0$ のときは $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$ なので

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

である．シグマ記号を使わずにまとめて書けばテキストの式を得る．

(3) $n = 3$ として $\log 1.1$ の近似値を求めよ．

【解答例】 $n = 3$ とすると

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_4(x) \qquad R_4(x) = (-1)\frac{x^4}{4(1+\theta x)^4}$$

である．この式に $x = 0.1$ を代入すれば次を得る．

$$\log 1.1 = 0.1 - \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{3} + R_4(0.1) \qquad R_4(0.1) = -\frac{0.0001}{4(1+\theta 0.1)^4}$$

$0 > R_4(0.1) > -0.000025$ より

$$0.0953333\cdots > \log 1.1 > 0.095308333\cdots$$

なので $\log 1.1 \fallingdotseq 0.0953$ である．

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ で $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ となることを示せ．

【解答例】 $0 \leqq x \leqq 1$ より $\dfrac{x}{1+\theta x} < 1$ である．よって

$$0 \leqq |R_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1} \leqq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

であり，$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ を得る．

【コメント】

- $f^{(n)}(x)$ の計算は $n = 0$ の時と $n \geqq 1$ の時は別に扱わなければならない．なお $(-1)!$ は定義できないので $n \geqq 1$ の時の式に $n = 0$ は代入できない．

- (2) で最初のシグマ記号は $k=0$ から始めているが，次のシグマ記号は $k=1$ から始まっている．このようなことが許されるか疑問に思う人がいるかもしれない．これは次の処理による．

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

- 近似値を求めるには誤差の大きさを考えないといけない．解答例では $0 > R_4(0.1) > -0.000025$ としたが $1+\theta 0.1 < 1.1$ を利用して

$$-\frac{0.000025}{(1.1)^4} > R_4(x) > -0.000025$$

としても良い．$(1.1)^4 = 1.4641$ なので近似値として 0.09531 を得る．ただ，ここまで苦労することもないだろう．
この値が電卓の結果と合わないという指摘を受けた．数学（特に微積分）で扱う対数は断らない限り自然対数（底が e の対数）だ．しかし，実験データの処理などでは常用対数（底が 10 の対数）も良く使われる．関数電卓では log を常用対数 ln を自然対数と使い分ける．注意しておくこと．

- (4) では $x \leqq 1$ より $lim x^n = 0$ とする答案が目立った．しかし，$x=1$ のときはこうはならない．深刻なミスとまでは言えないがやはり間違いだ．同様に $\lim(1+\theta x)^n = \infty$ も $x=0$ の時は成立しない．微妙なのは

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1} = 0$$

だ．θ は n によって変わるのでこれは微妙な等式だ．確かに $x=1$ のときも括弧内は 1 より小さいが，θ が 0 に近づいていくと 1 に収束してしまう．1^∞ は不定形なので極限は分からない．解答例では単に 1 より小さいことだけを示して 0 になることは分母の $n+1$ を利用している．

本日の講義の要点

1. 前回のレポート課題の補足
(4) の結果を使うと $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす x について

$$\log(1+x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \lim_{n\to\infty}R_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}$$

が成り立つ．これが $\log(1+x)$ のテイラー展開だ．テキストの 77 ページも合わせて見ておくこと．ここで $x=1$ を代入すると

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

という表示を得る．

2. $f(x) = (1+x)\alpha$ にテイラーの定理を適用する．
p.23 の基本的な関数の高次導関数を使えば $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ である．ゆえにテイラーの定理の k 次の項は

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$

である．この係数を一般化された二項係数と呼び $\binom{\alpha}{k}$ と表す．この記号によりテイラーの定理は

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_{n+1}(x), \qquad R_{n+1}(x) = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n}$$

と記述できる．若干コメントしておく．

- 一般化された二項係数 $\binom{\alpha}{k}$ において，α は任意だが k は 0 以上の整数である．ただし $\binom{\alpha}{0} = 1$ と約束する．
- α が自然数のときは，$k \leqq \alpha$ について $\binom{\alpha}{k} = {}_{\alpha}C_k$（組合せ）である．$k > \alpha$ のときは定義式の分子に 0 が現れるので 0 である．これは α 次多項式 $(1+x)^{\alpha}$ を $\alpha+1$ 回微分すれば 0 になることに対応している．
- α が自然数で $n = \alpha$ のとき $f^{(n+1)}(x) = 0$ なので $R_{n+1}(x) = 0$ である．テイラーの定理は

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k$$

  となるが，これは二項定理に他ならない．数学的帰納法によらない二項定理の証明が与えられたことになる．

他にテイラー展開を結果だけ紹介した．p.77 を参照すること．

3. $f(x) = \tan^{-1} x$ について

この関数の n 次導関数を今までの知識で一般に求めることはできない．ただし，$f^{(n)}(0)$ は求められる．それが演習問題 2.1 の 2.1.6 である．まずこの演習問題の回答を記述しておこう．

- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ より $(1+x^2)f'(x) = 1$ である．これを n 回微分（$n \geqq 1$）すればライプニッツの公式（定理 2.4）により

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + n2xf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0, \qquad n \geqq 1$$

  が成り立つ．特に $x = 0$ を代入すれば

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0) \qquad n \geqq 1$$

  という漸化式を得る．
- $f^{(0)}(0) = f(0) = \tan^{-1} 0 = 0$ より $f^{(2n)}(0) = 0$ である．奇数の場合は $f^{(1)}(0) = f'(0) = 1$ より

$$f^{(2k+1)}(0) = -2k(2k-1)f^{(2k-1)}(0) = 2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)f^{(2k-3)}(0) = (-1)^k(2k)!$$

  となる．

$f^{(k)}(0)$ がすべて求めることができたのでテイラーの定理の多項式部分はきちんと記述できる．

$$\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + R_{2n}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(2l+1)}(0)}{(2l+1)!} x^{2l+1} + R_{2n}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{2l+1} + R_{2n}(x)$$

さて，$R_{2n}(x)$ はどうなるだろうか．これは $\tan^{-1} x$ から $2n-1$ 次多項式をひいたものなのでもちろん微分可能である．

$$R_{2n}{}'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^l x^{2l}$$

和は公比 $-x^2$ の等比級数なので計算でき

$$R_{2n}{}'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2} = \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

である．$R_{2n}(0) = 0$ なので

$$R_{2n}(x) = \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$$

である．この表示を利用すれば $0 \leqq x \leqq 1$ で $\lim_{n\to\infty} R_{2n}(x) = 0$ が次の不等式から示せる．

$$0 \leqq |R_{2n}(x)| \leqq \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \leqq \int_0^x t^{2n} dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leqq \frac{1}{2n+1}$$

$-1 \leqq x \leqq 1$ については $R_{2n}(x)$ が奇関数であることを注意すればよい．以上から

$$\tan^{-1} x = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{2l+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{2l+1} \cdots \qquad -1 \leqq x \leqq 1$$

を得る．$x = 1$ とおけば

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

π の級数表示が得られたが，これを用いて π の近似値を求めようとしても効率が悪い．マチンは 18 世紀の初めに

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

という公式と，テイラー展開を組み合わせて π の値を小数点以下 100 桁まで計算した．電卓のない時代にここまで計算できるのかと思うと驚きである．

今日でテイラーの定理およびそれに関連する話題を終える．次回は微分に関するいくつかのトピック（ロピタルの定理など）を紹介する．来週で微分は終わりになるので 1 週間空けて 6 月 4 日に試験を行う．

本日のレポート課題とヒント

p.31 の 2.2.5 を課題にする．(1) については $\alpha = 1/2$ で $n = 3$ の場合なので今日の講義内容と照らし合わせれば分かるはずだ．(2) はテイラーの定理を極限計算に応用する話題に関連する．5 月 7 日の講義メモの 2 を参考にしてほしい．なお，次の問題を付け加える．

(3) (1) で求めた式を利用して $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよ．