微分積分 I 講義メモ (5 月 21 日)

前回のレポート課題について

$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ についてテイラーの定理を適用する問題だ.

(1) $n = 3$ とした時のマクローリンの定理を書き表せ.

【解答例】 一般化された二項係数は

$$\binom{1/2}{0} = 1, \quad \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = -\frac{1}{8}$$
$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{16}, \quad \binom{1/2}{4} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!} = -\frac{5}{128}$$

なので

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + R_3(x), \qquad R_3(x) = -\frac{5}{128}x^4(1+\theta x)^{1/2-4}$$

である.

(2) 次の極限が存在するように α の値を定めよ.

【解答例】 2 次近似多項式は $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ なので $\alpha = -1/8$ とすればよい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4(1+\theta x)^{-7/2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{16} - \frac{5}{128}x(1+\theta x)^{-7/2} = \frac{1}{16}$$

(3) $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよ.

【解答例】 $x = 0.1$ を代入すると

$$\sqrt{1.1} = 1 + \frac{0.1}{2} - \frac{0.01}{8} + \frac{0.001}{16} + R_4(0.1) = 1.0488125 + R_4(0.1)$$

である. ここで誤差は $(1+\theta 0.1)^{-7/2} < 1$ より

$$0 > R_4(0.1) > -\frac{5}{128}0.0001 \fallingdotseq -0.0000039, \qquad 1.0488125 > \sqrt{1.1} > 1.0488086$$

小数点以下第 6 桁で四捨五入すれば $\sqrt{1.1} \fallingdotseq 1.04881$ を得る.

【コメント】

- $f^{(n)}(x) = (1/2)(1/2-1)(1/2-2)\cdots(1/2-n+1)(1+x)^{1/2-n}$ だ. これから

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)\cdots(1/2-k+1)}{k!} = \binom{1/2}{k}$$
$$\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} = \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)\cdots(1/2-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{1/2-n-1} = \binom{1/2}{n+1}(1+\theta x)^{-n-1/2}$$

  を得る. 一般化された二項係数が自然に現れるが, その定義を確認しておくこと. 特に $(1+\theta x)$ の冪には注意すること.

- 多項式部分の係数を $f^{(k)}(x)/k$ とした人がいたが, それでは多項式にならない. テイラーの定理の意味が関数を多項式と誤差の和の形で表し, 誤差を $n+1$ 次導関数を使って表示するところにあることを例を通じて感じ取ってほしい.

- (2) は特に問題はないが，せっかく 3 次近似多項式と誤差の形にしたのだから，分子を 2 次近似式との差にするのはもったいない．

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3\right)=\lim_{x\to 0}-\frac{5}{128}(1+\theta x)^{-7/2}=-\frac{5}{128}$$

という極限のほうがテイラーの定理の応用にはふさわしい．5 月 7 日の講義メモの 2 と比較してほしい．

- 近似値の計算では誤差の扱いが曖昧な人が多かった．難しい話題だが解答例を参考に考えてほしい．求めた近似値の何桁までが意味を持つかの考察は応用上も重要だ．なお $1 < 1+\theta 0.1 < 1.1$ を利用して

$$-\frac{5}{128}(1.1)^{-7/2}0.0001 > R_4(0.1) > -\frac{5}{128}0.0001$$

とした人がいたが，$\sqrt{1.1}$ の近似値を求めるのに $(1.1)^{-7/2}$ の値を利用するというのはうれしくない．電卓を使わずに済む数値のみを利用するのがこの問題の趣旨だ．

本日の講義の要点

1. （極限の）不定形
   $f(x), g(x)$ の極限が α, β であるときその商 $f(x)/g(x)$ の極限は $\beta \neq 0$ なら α/β になる．$\beta = 0$ で $\alpha \neq 0$ の場合は $\pm\infty$ に発散する．しかし，$\alpha = \beta = 0$ の場合は分からない．このような極限を 0/0 型不定形という．不定形にはテキストにある 5 つのタイプの他にも 1^∞ 型，$\infty - \infty$ 型など様々なものがある．不定形の極限の調べ方には一般論はない．問題に応じて様々な工夫を行う必要がある．
2. ロピタルの定理
   不定形の極限を求めるための強力な方法としてロピタルの定理がある．テキストには定理 2.10 とその注意書きにまとめられているが，証明はごく特殊な場合にしか記述されていない．講義では証明は解説しなかった．ロピタルの定理の注意点を箇条書きしておく．
   - 極限は $x \to a$, $x \to a+0$, $x \to \infty$ などどれでも良い．
   - 対象は 0/0 型不定形と，∞/∞ 型不定形のみである．ロピタルの定理を使う前に，不定形のチェックを怠ってはならない．
   - 異なる型の不定形でも何らかの工夫で 0/0 型（∞/∞ 型）の極限に帰着できる場合がある．
   - 仮定が満たされる場合 $f'(x)/g'(x)$ が α に収束すれば（無限大に発散すれば）$f(x)/g(x)$ も α に収束する（無限大に発散する）．これがロピタルの定理の主張である．
   - ロピタルの定理は繰り返し使うことが多い．$f''(x)/g''(x)$, $f^{(3)}(x)/g^{(3)}(x), \ldots$ のように考えていくが，このとき各段階で 0/0 型（あるいは ∞/∞ 型）であることのチェックを怠ってはならない．
3. ロピタルの定理の適用例
   - p.33 の例の (1) と (4) を解説した．(1) についてはテキストの解答に補足すべき点はない．(4) では 0^0 型不定形なので対数をとって 0∞ 型の不定形にし，さらに $x\log x = \frac{\log x}{1/x}$ と変形して ∞/∞ 型不定形に変える．

     $$\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to+0} -x = 0$$

     あとはテキストの解答を見ること．
   - $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$

$\infty - \infty$ 型の不定形だが $\dfrac{\sin x - x}{x \sin x}$ と整理すれば，$x \to 0$ での極限は 0/0 型不定形になる．この分母分子を微分すると $\dfrac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$ となるがこの $x \to 0$ での極限もやはり 0/0 型不定形である．そこでもう一度分子分母を微分して $\dfrac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x}$ を得るが分母は 0 に収束しないので不定形ではない．この $x \to 0$ での極限は 0 である．

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0$$

- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{x^2}$

  0/0 型不定形であるので分母分子を微分して $\dfrac{3^x \log 3 - 2^x \log 2}{2x}$ とする．この分母は 0 に収束するが分子は $\log 3 - \log 2 \neq 0$ に収束する．これは不定形ではなく $\pm\infty$ に発散する．

  $$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{3^x \log 3 - 2^x \log 2}{2x} = \pm\infty$$

  なお，正負を考えれば $x \to +0$ のとき ∞ に $x \to -0$ のとき $-\infty$ に発散する．

  この問題では一回微分したものが不定形になるかのチェックを忘れてしまいがちだ．ロピタルの定理を使う時は，不定形のチェックを明記すること．

- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x}$

  ∞/∞ 型の不定形なので，分母分子をそれぞれ k 回微分してみる．$k \leqq n - 1$ のときは $(x^n)^{(k)}/e^x$ だが，分母は ∞ に発散し分子も $n - k \geqq 1$ より ∞ に発散する．よってロピタルの定理を n 回繰り返し

  $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

  を得る．

  この問題ではテイラー展開を利用するのも良い．$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ がすべての x について成り立つ．また $x > 0$ のときこの級数の各項はすべて正である．よって $x > 0$ で $e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ が成り立つ．

  $$0 < \frac{x^n}{e^x} < \frac{(n+1)!}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \to \infty)$$

  とすれば挟み撃ちで極限が 0 であることが分かる．

4. $f''(x) \geqq 0$ である関数のグラフが下に凸であること

   高校時代からなじみ深い事実であるがこれもテイラーの定理で証明できる．

   - $y = f(x)$ のグラフが下に凸であるとは，グラフ上の 2 点を結ぶ線分について，グラフがその線分の下にあることを言う．すなわち任意の $a < b < c$ について

     $$f(b) \leqq f(a) + \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(b - a)$$

     が成り立つことを言う．

   - $x = b$ で $n = 2$ のテイラーの定理を使う．

     $$f(x) = f(b) + f'(b)(x - b) + R_2(x), \qquad R_2(x) = \frac{f''(c)}{2}(x - b)^2$$

     ここで $f''(x) \geqq 0$ であることから $R_2(x) \geqq 0$ であり，$f(x) \geqq f(b) + f'(b)(x - b)$ が成り立つ．

- 2 つの式
$$f(a) \geqq f(b) + f'(b)(a-b), \qquad f(c) \geqq f(b) + f'(b)(c-b)$$
から，左の式に $c-b>0$ をかけ，右の式に $b-a>0$ をかけて加え合わせれば
$$f(a)(c-b) + f(c)(b-a) \geqq f(b)(c-b) + f(b)(b-a) = f(b)(c-a)$$
あとは $c-a>0$ で割って整理すればよい．

本日のレポート課題

p.39 の 2.3.1 を課題にする．ロピタルの定理を使って計算すればよい．なお，(4) は 1^∞ の不定形だ．対数をとって考えること．