微分積分 I 講義メモ (5 月 28 日)

前回のレポート課題について

演習問題 2.3.1（p.39）の 4 つの極限を課題にした．ロピタルの定理を用いて極限を求める問題である．

(1) $x \to 0$ のとき分母と分子はともに 0 に収束する．すなわち 0/0 型不定形なのでロピタルの定理が使える．分母分子を微分すれば

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{1-\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \frac{\cos x + 1}{-\cos^2 x}$$

となるので $x \to 0$ での極限は -2 である．ゆえに

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = -2$$

(2) これは ∞/∞ 型不定形なので，ロピタルの定理が使える．

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1} = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

よりこの $x \to \infty$ での極限は 1 なので

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+e^x)}{x} = 1$$

(3) $\infty - \infty$ 型の不定形なのでこのままではロピタルの定理は使えない．通分して一つの分数式にすれば $\dfrac{\tan x - x}{x \tan x}$ となるがこれは 0/0 型不定形である．この分子分母を微分して

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x \sin x + x} = \frac{\sin^2 x}{\cos x \sin x + x} = \frac{\sin x}{\cos x + \frac{x}{\sin x}}$$

となるが，最後は $x \to 0$ で分母は 1 に収束する．分子は 0 に収束するのでこの極限は 0 である．よってロピタルの定理により

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right) = 0$$

(4) 1^∞ 型の不定形なのでこのままではロピタルの定理は使えない．そこで対数をとってみれば $\frac{1}{x^2}\log\cos x$ となりこの $x \to 0$ での極限は 0/0 型不定形である．そこで分母と分子を微分して

$$\frac{-\tan x}{2x} = -\frac{\cos x}{2}\frac{\sin x}{x}$$

となるのでこの $x \to 0$ での極限は $-1/2$ である．よって $\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$ なので

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log\cos x}{x^2}} = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$$

【コメント】

- 不定形のチェックを明示的に行っていない答案は正解とは言えない．
- $f'(x)/g'(x)$ を使った後，その式の簡略化を試みると良い．詳しくは解答例を参考にせよ．
- 1^∞ が不定形であるとは $f(x)^{g(x)}$ において $f(x) \to 1$ でも $g(x) \to \infty$ であれば極限は分からないということだ．$f(x)$ の 1 への近づき方と $g(x)$ の無限大への発散の仕方のバランスで極限が変わってくることを意味している．

本日の講義の要点

1. 基本的な関数の原始関数（p.41 の囲みの中）
   少しずつコメントしながら p.41 の囲みの中の等式を解説した．
   - $1/x$ の原始関数は $\log|x|$ である．同様に $f'(x)/f(x)$ の原始関数は $\log|f(x)|$ である．絶対値を忘れないように．なお，$f(x) > 0$ が分かっている場合は絶対値をつける必要はない．(7) には絶対値がついて (10) には絶対値がつかない理由を理解すること．
   - (8)(9)(10) の双曲線関数の積分は (5)(6)(7) の三角関数の積分とよく似ている．p.22 と比較しておくように．
   - (11)(12) は p.22 の逆三角関数の微分に基づく．この 2 つはきちんと覚えておくように．
   - (13) については右辺の微分が積分の中身になっていることを確認せよ．これはこういう公式があったということだけ頭の中に留めておけばよい．覚えるまでのことはない．
2. 部分積分の利用
   部分積分とは $f(x)g(x)$ の積分を $f(x)$ を微分し $g(x)$ を積分したものの積の積分に直すことだ．どちらを微分し，どちらを積分するか明確に意識すると良い．講義で紹介したのは次の 3 つである．

$$\int \log x dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - x$$

$$\int \tan^{-1} x dx = x\tan^{-1} x - \int x\frac{1}{1+x^2}dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$$\int \sin^{-1} x dx = x\sin^{-1} x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$$

   いずれも被積分関数に 1 がかかっていると思い 1 を積分し被積分関数を微分している．
3. 置換積分の利用
   今日の講義では結果的に $x^2 = u$ とおくものばかり解説した．$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int xf(x^2)dx = \frac{1}{2}F(x^2)$$

   である．右辺の微分が $xf'(x)$ になることは簡単に分かる．なおここで積分の中に x が入っていることは重要である．

$$\int f(x^2)dx = \frac{1}{2x}F(x^2) \quad \text{（要注意：この等式は間違いだ．ここだけ取り出さないように．）}$$

   という計算をしばしば見かけるが，これは本質的な間違いである．具体的には

$$\int x\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sin x^2, \qquad \int \cos x^2 dx \neq \frac{1}{2x}\sin x^2$$

   である．特に右の積分の原始関数は初等関数にならない．式で表すことができないので積分計算で求められるはずがない．

微分の場合は和差積商合成の微分がすべて公式として与えられているので，初等関数の微分は初等関数になる．微分計算も基本的な関数の微分から微分公式を利用することにより簡単に実行できる．しかし，積分の場合はそのような積分公式は存在せず，問題に応じて様々な工夫をしなければならない．比較的簡単な関数でも積分計算不可能なもの（原始関数が初等関数にならないもの）が数多く存在する．次回の講義（6 月 11 日）か

ら，積分計算のためのいくつかの強力な計算方法を解説する．

本日のレポート課題

次の関数の不定積分を求めよ．

$$(1)\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad (2)\ \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \quad (3)\ x(x^2+2)^{\alpha} \quad (4)\ \frac{x^2+3}{\sqrt{x}} \quad (5)\ \frac{1}{x^2+x+1} \quad (6)\ 2^x$$