微分積分 I 講義メモ (6 月 18 日)

前回のレポート課題について

$$(1)\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad (2)\ \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \quad (3)\ x(x^2+2)^\alpha \quad (4)\ \frac{x^2+3}{\sqrt{x}} \quad (5)\ \frac{1}{x^2+x+1} \quad (6)\ 2^x$$

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x$ に留意すれば

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\frac{1}{2}dx = \sin^{-1}\frac{x}{2} + C$$

(2) 同様に $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx = \log(x+\sqrt{x^2+A})$ を使って

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx = \log|x+\sqrt{x^2-4}+C|$$

(3) $x^2+2=u$ と置換積分する．$2xdx = du$ である．

$$\int x(x^2+2)^\alpha dx = \int u^\alpha \frac{du}{2} = \begin{cases} \dfrac{u^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)} = \dfrac{(x^2+2)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)} + C & (\alpha \neq -1) \\ \dfrac{1}{2}\log u = \dfrac{1}{2}\log(x^2+2) + C & (\alpha = -1) \end{cases}$$

(4) $\frac{x^2+3}{\sqrt{x}} = x^{3/2} + 3x^{-1/2}$ より

$$\int \frac{x^2+3}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + 6x^{1/2}$$

(5) 分母を平方完成すれば $x^2+x+1 = (x+1/2)^2 + (3/4)$ となるので $x+1/2 = (\sqrt{3}/2)u$ と置換積分する．

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{(3/4)(u^2+1)}\frac{\sqrt{3}}{2}du = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right)$$

(6) $2^x = e^{x\log 2}$ より

$$\int 2^x dx = \int e^{x\log 2}dx = \frac{1}{\log 2}e^{x\log 2} = \frac{1}{\log 2}2^x + C$$

本日の講義の要点

1. 部分分数展開

   部分分数展開についてはテキストの p.49 の最初の 4 行に記載されているが，これでは分からないだろう．まず部分分数展開のプロセスを箇条書きしておこう．

   (1) 有理関数とは二つの多項式の商で表される関数を言う．以下 $f(x)/g(x)$ と表す．

   (2) 分子 $f(x)$ の次数が分母 $g(x)$ の次数以上であるときは，割り算 $f(x) \div g(x) = q(x) \cdots r(x)$ により

   $$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

   と変形する．よって分子の次数が分母の次数未満だとして議論する．

   (3) 分母を 1 次式と判別式負の 2 次式の積に因数分解する．これは一般に可能であることが代数学の基本定理（方程式は複素数の範囲で解を持つ）と因数定理により証明できる．まあ，これは事実として受け入れること．

(4) 因数の種類に応じて以下のように分数式を用意する．

- 因数 $(x+a)^k$ については以下の k 個の分数式の和を用意する．

$$\frac{A_1}{x+a}+\frac{A_2}{(x+a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x+a)^k}$$

- 因数 $(x^2+bx+c)^l$, $b^2-4c<0$ については以下の l 個の分数式の和を用意する．

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_lx+C_l}{(x^2+bx+c)^l}$$

(5) 用意されたすべての分数式の和が元の分数式と等しくなるという形の等式を作る．

(6) 分母を払って両辺の多項式の係数を比較することにより，連立方程式が得られる．それは必ず唯一組の解を持つので，部分分数展開の形が得られる．

2. 部分分数展開の例

(1) $\frac{x^4}{x^3+1}$ を上に述べた方法に従って部分分数展開する．

(2) $x^4 \div (x^3+1) = x \cdots -x$ より

$$\frac{x^4}{x^3+1}=x+\frac{-x}{x^3+1}$$

(3) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ であり x^2-x+1 の判別式は負である．

(4) 因数 $x+1$ については $\frac{A}{x+1}$ を， x^2-x+1 については $\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ を用意する．

(5) 用意された分数式の和から

$$\frac{-x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

となるように A, B, C を定める．

(6) 両辺に $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ をかければ

$$-x=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)$$

となる．これより $A+B=0$, $-A+B+C=1$, $A+C=0$ となるので $A=-1/3$, $B=C=1/3$ を B $A=-1/3$, $B=C=1/3$ を得る． 以上まとめると

$$\frac{x^4}{x^3+1}=x-\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2-x+1}$$

この連立方程式はただ一組の解を持つので係数行列は正則である．よって分子の $-x$ を他の 2 次以下の式に取り換えてもやはりただ一組の解を持つ．(3) 以下のプロセスがうまくいくためには分子が 2 次以下の式でなくてはならないこと，逆に 2 次以下の式ならいつでも大丈夫なことも分かるだろう．(2) の割り算のプロセスが必要なことも理解してほしい．

3. 部分分数展開で現れる分数式の不定積分

3(6) で得られた展開式を不定積分する場合，問題になるのは第 3 項のみであろう．これは平方完成 $x^2-x+1=(x-1/2)^2+3/4$ から $x-1/2=(\sqrt{3}/2)u$ とおくとうまくいく．基本的なテクニックだ．

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx&=\int\frac{(\sqrt{3}/2)u+(3/2)}{(3/4)(u^2+1)}\frac{\sqrt{3}}{2}du=\int\frac{u}{u^2+1}du+\sqrt{3}\int\frac{1}{u^2+1}du\\&=\frac{1}{2}\log(u^2+1)+\sqrt{3}\tan^{-1}u+C=\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)+\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right)+C\end{aligned}$$

なお，2 行目の二つの式の log の中身は定数倍の違いがある．しかい対数をとっているので定数の違いになり，積分定数の中に組み込める．

4. 部分分数展開の計算練習

部分分数の置き方のみ記しておく．後は各自やってみること．

- $\dfrac{4x+2}{4x^2+7x-2} = \dfrac{A}{4x-1} + \dfrac{B}{x+2}$
- $\dfrac{2x+3}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$
- $\dfrac{4x^2-2x+1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

理論的にはすべての有理関数について部分分数展開を行える．あとは展開から出てくる有理関数の不定積分ができればよい．これについては次回解説する．

本日のレポート課題

次の有理関数の不定積分を求めよ．ヒントはなし．

$$(1)\frac{x}{(2x+1)^2} \quad (2)\frac{x-1}{x^2(x+1)} \quad (3)\frac{1}{x^3(x^2+1)} \quad (4)\frac{1}{x^4-1}$$