微分積分 I 講義メモ (6 月 25 日)

前回のレポート課題について

次の有理関数の不定積分を求めよ．ヒントはなし．

$$(1)\frac{x}{(2x+1)^2} \quad (2)\frac{x-1}{x^2(x+1)} \quad (3)\frac{1}{x^3(x^2+1)} \quad (4)\frac{1}{x^4-1}$$

(1) 被積分関数の分母は 1 種類の因数しか持たないので

$$\frac{x}{(2x+1)^2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2}$$

の形に展開する．両辺に $(2x+1)^2$ をかけて分母を払えば $x = A(2x+1) + B = 2Ax + (A+B)$ となるので $A = 1/2,\ B = -1/2$ である．

$$\int \frac{x}{(2x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{(2x+1)^2}dx = \frac{1}{4}\left(\log|2x+1| + \frac{1}{2x+1}\right) + C$$

(2) 被積分関数の分母は x と $x+1$ の 2 種類の因数を持つ．x は 2 つあるので以下のように 2 つの分数式を用意する．

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

両辺に $x^2(x+1)$ をかけて分母を払うと $x-1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2 = (A+C)x^2 + (A+B)x + B$ である．ゆえに $A+C = 0,\ A+B = 1,\ B = -1$ なので $A = 2,\ B = -1,\ c = 2$ を得る．

$$\int \frac{x-1}{x^2(x+1)}dx = \int \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1}dx = 2\log|x| - 2\log|x+1| + \frac{1}{x} + C$$

(3) 被積分関数の分母は x と x^2+1 の 2 種類の因数を持つ．x^3 になっていることに注意して

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1}dx$$

と展開する．$1 = Ax^2(x^2+1)+Bx(x^2+1)+C(x^2+1)+(Dx+E)(x^3) = (A+D)x^4+(B+E)x^3+(A+C)x^2+Bx+C$ より $C = 1,\ B = 0,\ A = -1,\ E = 0,\ D = 1$ である．

$$\int \frac{1}{x^3(x^2+1)}dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{x}{x^2+1}dx = -\log|x| - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

(4) 分母は $x^4-1 = (x^2+1)(x+1)(x-1)$ と 1 次式と判別式負の 2 次式の積に因数分解される．ここには 3 種類の因数があるが，それぞれ重複はしていない．ゆえに

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

と部分分数展開する．分母を払えば $1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$ となるので

$$1 = (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)$$

より $A = 1/4,\ B = -1/4,\ C = 0,\ D = -1/2$ である．

$$\int \frac{1}{x^4-1}dx = \int \frac{1/4}{x-1} + \frac{-1/4}{x+1} + \frac{-1/2}{x^2+1}dx = \frac{1}{4}\log\frac{|x-1|}{|x+1|} - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

【コメント】

- (1)(4) は高校生的な感覚でも部分分数に展開できるが，部分分数展開の技法の修得を目的にした出題なのでこのようなやり方は好ましくない．
- 分母の x^3 について，分数式を $\frac{A+Bx+Cx^2}{x^3}$ とおく人がいる．これでも A, B, C は求められるが，さらにその後の処理が必要になる．解答例の置き方が最も効率的なので，理解するようにしてほしい．
- 判別式負の 2 次式の場合，分子は 1 次式にする．定数としてしまうと，係数を求められない．
- この問題での展開された後の各分数式の積分は易しい．特に悩まなくても答えられるようにしてほしい．
- 高校の積分計算は様々な工夫が必要だった．うまく計算できた場合は，それなりにうれしく感じただろう．しかし，ここで学習している計算技法は「必ずうまくいく方法」だ．今はその修得を目指しているのだから，何かいい方法があるか悩んではいけない．定められた手法に従ってきちんと計算してほしい．

本日の講義の要点

1. 有理関数の積分

有理関数の不定積分は部分分数展開により

$$\frac{A_k}{(x+a)^k} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}\ (b^2-4c<0)$$

という 2 つの積分に帰着される．前者の積分は簡単なので省略する．後者の不定積分は分母の平方完成 $x^2+bx+c=(x+b/2)^2+(4c-b^2)/4$ を参考に $x+b/2=\sqrt{\frac{4c-b^2}{4}}u$ と置換積分すると良い．

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}dx &= \int \frac{B\sqrt{\frac{4c-b^2}{4}}u+C-\frac{bB}{2}}{\left(\frac{4c-b^2}{4}(u^2+1)\right)^l}\sqrt{\frac{4c-b^2}{4}}du \\ &= \left(\frac{4}{4c-b^2}\right)^{l-1}B\int\frac{u}{(u^2+1)^l}du+\left(\frac{4}{4c-b^2}\right)^{l-1/2}\left(C-\frac{bB}{2}\right)\int\frac{1}{(u^2+1)^l}du\end{aligned}$$

講義ではこの係数の計算は省略した．ここでは正しく書いてみたが，だからといってあまり恩恵はない．さて，第 1 項の積分は

$$\int\frac{u}{(u^2+1)^l}du=\begin{cases}\frac{1}{2}\log(u^2+1) & (l=1)\\ \frac{1}{2(1-l)}\frac{1}{(u^2+1)^{l-1}} & (l\geqq 2)\end{cases}$$

第 2 項の積分は $I_k=\int\frac{1}{(x^2+1)^k}dx$ とおいて積分の漸化式を作る．まず $I_1=\tan^{-1}x$ である．$k\geqq 2$ とし

$$I_k=\int\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^k}dx=I_{k-1}-\int x\frac{x}{(x^2+1)^k}dx$$

ここで第 1 項の積分の結果を利用して部分積分を行えば

$$I_k=I_{k-1}+\frac{1}{2k-2}\frac{x}{(x^2+1)^{k-1}}-\frac{1}{2k-2}\int\frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}dx=\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}+\frac{1}{2k-2}\frac{x}{(x^2+1)^{k-1}}$$

この漸化式を使えば I_k が計算できる．例えば

$$I_2=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$$

2. 置換の技法 1

x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の不定積分を考えよう．$a<0$ の場合は判別式は正でなくてはならない[*1]ので $ax^2+bx+c=(-a)(x-\alpha)(\beta-x)$, $\alpha \leqq x \leqq \beta$ と書き直せる．このとき

$$u=\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

とおく．この置換により $u^2(\beta-x)=x-\alpha$ なので

$$x=\frac{\beta u^2+\alpha}{u^2+1} \qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a}(\beta-x)u=\sqrt{-a}\frac{(\beta-\alpha)u}{u^2+1} \qquad dx=-\frac{(\beta-\alpha)2u}{(u^2+1)^2}du$$

となる．これより u の有理関数の積分に帰着できる．

この技法についてはテキストの節末問題 3.2.4(1) を利用した．

$\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx$ について，被積分関数の定義域は $1<x<2$ である．ここで $u=\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$ とおいて置換積分[*2]する．$(x-1)u^2=2-x$ より

$$x=\frac{u^2+2}{u^2+1}=1+\frac{1}{u^2+1}, \qquad \sqrt{(x-1)(2-x)}=(x-1)u=\frac{u}{u^2+1}, \qquad dx=-\frac{2u}{(u^2+1)^2}du$$

なので

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx=-\int \frac{u^2+1}{u}\frac{2u}{(u^2+1)^2}du=-\int \frac{2}{u^2+1}du=-2\tan^{-1}u$$
$$=-2\tan^{-1}\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}+C$$

テキストの解答と正負が異なるが，こちらが正しい．

3. 置換の技法 2

x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の不定積分で $a>0$ の場合は技法 1 は使えない．この場合は $\sqrt{ax^2+bx+c}=u-\sqrt{a}x$ とおくとうまくいく．2 乗すると $bx+c=u^2-2\sqrt{a}ux$ と x^2 の項が消えるため，$x=\frac{u^2-c}{2\sqrt{a}u+b}$ と有理式で記述できるからだ．この技法についてはテキストの例題 3.6(3) を使って解説した．

$\sqrt{x^2+x+1}=u-x$ と置換する．両辺を 2 乗すれば $x+1=u^2-2ux$ なので

$$x=\frac{u^2-1}{2u+1} \qquad \sqrt{x^2+x+1}=u-\frac{u^2-1}{2u+1}=\frac{u^2+u+1}{2u+1} \qquad dx=\frac{2u^2+2u+2}{(2u+1)^2}du$$

であり，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int \frac{2u+1}{u^2+u+1}\frac{2u^2+2u+2}{(2u+1)^2}du=\int \frac{2}{2u+1}du$$
$$=\log|2u+1|=\log|2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1|+C$$

4. 置換の技法 3

$\sin x$ と $\cos x$ の有理式の積分は $\tan\frac{x}{2}=u$ と置くと良い．

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2} \qquad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad dx=\frac{2}{1+u^2}du$$

なので有理式の積分になる．例題 3.5(1) を使って解説した．

[*1] 負なら平方根の中が常に負になるので実関数にならない．

[*2] テキストの指示と形が異なるが，同じ置換である．$2-x>0$, $x-1>0$ に注意せよ．

$\int \frac{1}{\sin x}dx$ について $\tan \frac{x}{2} = u$ とおけば

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2}{1+u^2}du = \int \frac{1}{u}du = \log|u| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

以上の 3 つの技法はある種の不定積分の計算に一般的に有効な汎用性の高い方法である．もっとも，この方法が最も簡単に計算できる方法というわけではない．さまざまな工夫でより簡単に計算できる場合もある．汎用性の高い方法をきちんと理解したうえで，問題に応じた簡単な方法を考えてみると良い．

本日のレポート課題

次の不定積分を求めよ．

$$(1) \int \frac{1}{x\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx \qquad (2) \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-4x-2}}dx \qquad (3) \int \frac{1}{5+4\sin x}dx$$

これらは今日学習した 3 つの技法を使って計算する問題だ．まずは一般的な方法にのっとって計算してみること．