微分積分 I 講義メモ (7 月 9 日)

前回のレポート課題について

(2) $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$ に注意すれば

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}[-e^{-x^2}]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

(3) $e^x = u$ と置換積分する．x が 0 から ∞ まで増加するとき，u は 1 から ∞ まで増加する．また $x = \log u$ なので $dx = \frac{du}{u}$ である．

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx = \int_1^\infty \frac{1}{u + (1/u)}\frac{du}{u} = \int_1^\infty \frac{du}{1+u^2} = [\tan^{-1} u]_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

(4) $x = 1$ で積分域を分け絶対値を外す．

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

第 1 項の被積分関数の原始関数は $\sin^{-1} x$，第 2 項では $\log(x + \sqrt{x^2-1})$ である．よって

$$与式 = [\sin^{-1} x]_0^1 + [\log(x + \sqrt{x^2-1})]_1^2 = \frac{\pi}{2} + \log(2 + \sqrt{3})$$

(5) 置換の技法を使って $u = \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$ とおく．$x \to a+0$ のとき $u \to +0$，$x \to b-0$ のとき $u \to \infty$ である．また $x = \frac{a+bu^2}{1+u^2}$，$dx = \frac{2(b-a)u}{(1+u^2)^2}du$，$\sqrt{(x-a)(b-x)} = \frac{(b-a)u}{1+u^2}$ より

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx = \int_0^\infty \frac{1+u^2}{(b-a)u}\frac{2(b-a)u}{(1+u^2)^2}du = \int_0^\infty \frac{2}{1+u^2}du = [2\tan^{-1} x]_0^\infty = \pi$$

【コメント】

- 微分積分学の基本公式 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ は広義積分についても，$F(b) = \lim_{x\to b-0} F(x)$，$F(a) = \lim_{x\to a+0} F(x)$ と理解しなおすことによって適用できる．計算上は広義積分と通常の積分を厳格に区別しなくても良い．
- (5) の積分での平方根の中身は a, b で 0 となる下に凸の放物線だ．ゆえに $[a, b]$ の中点が原点に来るように平行移動すれば $r = (b-a)/2$ として

$$\int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}dx$$

となる．これは $x = r\sin\theta$ とおくと簡単に積分できる．

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \pi$$

本日の講義の要点

1. 積分の応用 1（曲線の長さ）

   $f(x)$ を C^1 級関数とし，$y = f(x)$ のグラフの $a \leqq x \leqq b$ の上にある部分の長さを求めよう．

   - 区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ をとり，$\mathrm{P}_i(a_i, f(a_i))$ とおく．曲線を折れ線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\cdots\mathrm{P}_n$ で近似する．

- 折れ線の長さは

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(a_i-a_{i-1})^2+(f(a_i)-f(a_{i-1}))^2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{f(a_i)-f(a_{i-1})}{a_i-a_{i-1}}^2}(a_i-a_{i-1})$$

である．ここで平均値定理により $a_{i-1}<x_i<a_i$ を次が成り立つようにとる．

$$\frac{f(a_i)-f(a_{i-1})}{a_i-a_{i-1}}=f'(x_i)$$

- 折れ線の長さは

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(x_i))^2}(a_i-a_{i-1})$$

となるが，これは連続関数 $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ のリーマンの和に他ならない．

- 分割を細かくしていくとき，折れ線の長さは曲線の長さに近づいていくはずだ．一方分割を細かくしていくときリーマン和は定積分の値に収束する．ゆえに長さは次の式 (p.60(2)) で求められる．

$$\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

このように，求めたいもの（曲線の長さ）に対して，まず対象を分割し，分割された一つ一つを分かりやすいもの（線分）で近似する．そこから求めたいものの近似値をだし，分割を細かくしていった時の極限を考えるという方法を「区分求積法」と呼んでいる．これは古代ギリシャの数学でも盛んに使われた手法であり，球の表面積など様々な値を求めることができた．区分求積法の考えと，リーマン和の極限という定積分の定義を組み合わせることによって，このプロセスはより簡明なものになった．

2. 積分の応用 1（曲線の表し方による長さの公式）
$y=f(x)$, $a\leqq x\leqq b$ が $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leqq t\leqq\beta$ と媒介変数表示されているときは，置換積分 $x=x(t)$ により次のようになる (p.60 (1))．ただし $x'(t)\geqq 0$ としておく．

$$\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}x'(t)dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

この等式は，より一般の媒介変数で表示された曲線の長さに適用できる．
極座標により $r=f(\theta)$, $\alpha\leqq\theta\leqq\beta$ で定義される曲線は媒介変数表示 $x(\theta)=r(\theta)\cos\theta$, $y(\theta)=r(\theta)\sin\theta$ による曲線に他ならない．

$$(x')^2+(y')^2=(r'\cos\theta-r\sin\theta)^2+(r'\sin\theta+r\cos\theta)^2=(r')^2+r^2$$

より曲線の長さは次 (p.60(3)) で与えられる．

$$\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')^2}d\theta$$

3. 計算例
$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$ の $0\leqq x\leqq a$ の部分の長さを求める．

$$\int_0^a\sqrt{1+\sinh^2 x}dx=\int_0^a\cosh xdx=[\sinh x]_0^a=\sinh a=\frac{e^a-e^{-a}}{2}$$

講義では指数関数のままやったがここでは双曲線関数を使って求めた．内容はまったく同じだ．

4. 積分の応用２（面積）

$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフおよび $x = a, x = b$ で囲まれた図形の面積を求める．もちろん高校数学で既知のことだがリーマン和と関係づけて説明する．

- 区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ をとり図形を $x = a_i$ によって n 個の部分に分割する．
- $a_{i-1} \leqq x_i \leqq a_i$ をとって，$x = a_{i-1}$ および $x = a_i$ で挟まれた部分を，幅 $a_i - a_{i-1}$，長さ $|f(x_i) - g(x_i)|$ の帯 (長方形) で近似する．
- 帯の面積の和は

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - g(x_i)|(a_i - a_{i-1})$$

だがこれは $|f(x) - g(x)|$ のリーマン和である．

- 分割を細かくしていけば帯の面積の総和は求める図形の面積に収束する．一方リーマン和の極限は定積分なので面積は次の式で与えられる．

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

5. 計算例 3.4.1(3)

二つの曲線の交点の x 座標は $x = \pm 2$ である．

$$\int_{-2}^{2} \frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}dx = 2\left[4\tan^{-1}\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = 2\pi - \frac{4}{3}$$

6. 積分の応用２（極座標での面積）

極座標において $r = f(\theta)$ のグラフと原点を出発する 2 つの半直線 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ で囲まれた図形の面積を求めよう．

- 区間 $[\alpha, \beta]$ の分割 $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = \beta$ をとる．図形を原点を出発する半直線 $r = \alpha_i$ たちで分割する．
- $\alpha_{i-1} \leqq \theta_i \leqq \alpha_i$ をとり，$\theta = \alpha_{i-1}$ と $\theta = \alpha_i$ で囲まれた部分を半径 $f(\theta_i)$，頂角 $\alpha_i - \alpha_{i-1}$ の扇形で近似する．
- 扇形の面積の和は

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_i))^2(\alpha_i - \alpha_{i-1})$$

だがこれは $\frac{1}{2}(f(\theta))^2$ のリーマン和である．

- ゆえに面積は次の式で与えれる．

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(f(\theta))^2 d\theta$$

7. 計算例 3.4.2(3)

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/8} \tan^2 2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 \frac{1}{2(1+u^2)}du = \frac{1}{4}[u - \tan^{-1} u]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}$$

ここで $\tan 2\theta = u$ と置換積分している．

8. 積分の応用３（体積）
座標空間において平面 $x = a$ と平面 $x = b$ で挟まれた立体の体積について

$$\int_a^b S(t)dt \qquad S(x) \text{ は平面 } x = t \text{ による立体の断面積}$$

で求められることを解説した．
    - 区間 $[a, b]$ の分割 $\varDelta : a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ をとり立体を平面 $x = a_i$ によって n 個のスライスに分割する．
    - $a_{i-1} \leqq x_i \leqq a_i$ をとって，$x = a_{i-1}$ および $x = a_i$ で挟まれたスライスを，厚さ $a_i - a_{i-1}$，面積 $S(x_i)$ の板で近似する．
    - 板の体積の和は

$$\sum_{i=1}^{n} S(x_i)(a_i - a_{i-1})$$

    だがこれは $S(x_i)$ のリーマン和である．
9. まとめ
定積分はリーマン和の極限として定義された．その定義が，各種の応用に結びついていることに注意してほしい．一方，計算は微分積分学の基本公式を利用して不定積分から求める．定義から微分積分学の基本公式を得るまでの論理については前回の講義で簡単に紹介した．こうしてみると積分の理論を理解する鍵はリーマン和にあることに気づくだろう．高校のように積分を微分の逆演算として定義してしまうと，積分の豊かな応用を理解できなくなる．

これで微分積分 I の講義を終える．試験は 7 月 30 日でありしばらく間があるが，勉強は続けるように．最低限，レポート課題に出した問題はすべて理解するようにしてほしい．