理系基礎科目「微分積分 I」（工学部機械 2 組）第 1 回試験（6 月 4 日実施）解答例とコメント

各小問に 10 点，大問 3 に 20 点の 100 点満点で採点した．最高点は 70 点，最低点は 0 点，平均点は 38.3 点だった．はっきり言って全く勉強しないまま試験を受けたのではないかと思える人が多すぎる．どうせ微分だ，高校の知識で何とかなると高をくくっていたのだろうか．高校の知識で解ける問題など最初から出すつもりはない．

原因は日常的な学習の不足だろう．講義メモは毎週の自習教材の意味を持たせており，レポート課題の解答も掲載している．きちんと学習していれば 50 点は取れるはずの問題だ．日常的な学習をせず，試験前に勉強しようとしても間に合うはずがない．形だけとにかく覚えて勉強した気になったのでは特に大問 2 には答えられないだろう．日常的な学習の必要性を自覚すること．

大学の単位制は授業時間の 2 倍の家庭学習をすることを前提に作られている．家庭学習をしない人が単位を得られないのは当然の結果である．とはいってもあまり多くの学生に不可をつけるわけにもいかない．今回は 30 点未満の 18 名を不合格とする．この 18 名は積分の試験で不合格になった場合は再試験の対象にならない．覚悟して後半の授業に臨むように．

**1** (1) $y = \cos^{-1} x$ の定義域，値域，グラフを書け．

【解答例】 定義域は $[-1, 1]$，値域は $[0, \pi]$，グラフについてはテキストを見ること．

【コメント】

- 逆三角関数は三角関数の逆関数である．$y = \cos^{-1} x$ とは $x = \cos y$ ということなので $-1 \leqq x \leqq 1$ は当然のことだ．形式的に覚えるのではなく意味を意識して覚えるようにすれば間違えることはないと思うのだが．
- おそらく $\cos^{-1}(1/2)$ がいくつかという問題にしたらできたのかもしれない．計算方法だからだ．しかし逆三角関数の理解についてはこのような細部の問題では測れない．グラフをイメージすることは関数を理解することのもっとも基本なはずだ．
- 逆三角関数は 4 月 16 日の講義で扱った．グラフはテキストに書いてあるのできちんと見ておくように指示したはずだ．

**1** (2) 等式 $\tan^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ を示せ．

【解答例】 $\theta = \sin^{-1} x$ とおけば $\sin\theta = x$ かつ $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ である．ゆえに $\cos\theta \geqq 0$ なので $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$ である．

$$\tan\sin^{-1} x = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

と $-\pi/2 \leqq \sin^{-1} x \leqq \pi/2$ から

$$\sin^{-1} x = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

【コメント】

- 等式の証明を $\tan^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ から始めるのは議論としておかしい．これでは証明したい式を

仮定したことになるからだ．この式を変形して正しい式を導けたからといって，元の等式が証明できたことにはならない．もっとも「$A = B$ が成り立つためには $C = D$ が成り立てばよい．」という議論を続けていけば正しい議論になるのだが．なお「$A = B$ が成り立てば $C = D$ が成り立つ」は論理記号では「$A = B \Longrightarrow C = D$」であり，「$A = B$ が成り立つためには $C = D$ が成り立てばよい」は「$A = B \Longleftarrow C = D$」である．

- 両辺の導関数が等しいからという答案があったが $f'(x) = g'(x)$ では $f(x) - g(x)$ が定数であることしかわからない．$x = 0$ などを代入してその定数が 0 であることを言わないと $f(x) = g(x)$ とは言えない．
- $\tan\sin^{-1}x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ から $\sin^{-1}x = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ を言うには $-\pi/2 < \sin^{-1}x < \pi/2$ が必要だ．解答の中にこの不等式が記述されていたとしても，それを使う場面で言及がないと正しい証明とは言えない．
- 逆三角関数に関する等式の証明は 4 月 16 日の講義でレポート課題にした 1.3.3(1) でやってもらった．4 月 23 日の講義メモにその解答例とコメントをつけている．結論から始めないように注意もしている．

**1** (3) $x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$ の導関数を求めよ．

【解答例】 $(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ と $(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ を使えばよい．

$$(x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2})' = \sin^{-1}x + x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x$$

【コメント】

- $\sin^{-1}x$ の導関数を間違えて覚えている人がいる．確実に覚えるためには導出の過程を何度か自分で体験することが必要だ．例えば
  $y = \sin^{-1}x$ より $x = \sin y$ なので $1 = \cos y y'$ になる．$\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$ なので $y = \sin^{-1}x$ のグラフが単調増加であることと合わせて $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ となる．
  この考察が頭の中で 15 秒でできるようになれば公式を覚えたのと変わらない．
- 合成関数の微分法則のミスが目立つ．まれだが積の微分法則を間違える人もいる．計算量が足りないのでは．

**1** (4) $f(x) = (x+1)\cos x$ とするとき $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

【解答例】 ライプニッツの公式を使えば $(x+1)$ の 2 次以上の微分がすべて 0 であることから $n \geqq 1$ で

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (x+1)^{(k)}(\cos x)^{(n-k)} = (x+1)(\cos x)^{(n)} + n(\cos x)^{(n-1)}$$

となる．これに $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2)$ を代入すれば

$$f^{(n)}(x) = (x+1)\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

【コメント】

- 4 回ぐらい微分して結果を予想した答案が目立った．これは数学的帰納法で証明したものを除いて正解

にはしていない．そもそもいくつか計算して予想を立てたとしてもそれで議論が終わることはあり得ない．予想はあくまで予想であって結論ではない．
今年の入試問題で三角形と平行線を使って長さの漸化式を求める問題を出した．多くが 2 番目まで求めて勝手な予想を立て破たんした．いくつか調べて予想を立てるという受験数学での技法の危うさが際立った．こういう議論では正解にならないことを意識してほしい．

- $\cos x$, $\sin x$ を微分すると偏角が 90 度進むことは知っておいてほしい．すなわち $(\cos x)' = \cos(x + \pi/2)$, $(\sin x)' = \sin(x + \pi/2)$ が成り立つ．これは単位円上の速度 1 の反時計回りの運動の速度ベクトルを考えると良い．
- ライプニッツの公式における $(\cos x)^{(k)}$ を $(\cos x)^k$ と書く人がいるが記号の違いには注意すること．中にはべきだと思い込んでいる答案もあったが問題外だ．意味を考えずに覚えるのは，勉強した気になっている分だけ覚えないより悪いことかもしれない．
- ライプニッツの公式は 4 月 23 日の講義で扱った．テキスト p.24 の例を解説したがこの問題はその類題である．

**1** (5) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{\sin x}$ を求めよ．

【解答例】対数をとって $\log x^{\sin x} = \sin x \log x$ の極限を考える．

$$\lim_{x\to+0} \sin x \log x = \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{1/\sin x}$$

とすればこれは $\infty/\infty$ 型の不定形なのでロピタルの定理が使える．分母分子をそれぞれ微分したものの極限は

$$\lim_{x\to+0} \frac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x} = \lim_{x\to+0} -\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

となるのでロピタルの定理により $\lim_{x\to+0} \sin x \log x = 0$ である．よって

$$\lim_{x\to+0} x^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x \log x} = e^0 = 1$$

【コメント】

- ロピタルの定理は 0/0 型あるいは $\infty/\infty$ 型の不定形でないと使えない．ところがそういうことを自覚せずになんとなく「微分したものの極限を考えればよい」と誤解している人が多い．例えば $\sin x \log x$ を微分するような答案だ．$f(x)$ の極限と $f'(x)$ の極限は無関係なので，こんな計算をしても何の意味もない．
このような解答をする人でも単純な問題であればきちんと計算できるのかもしれない．ただ，それはロピタルの定理を理解しないままなんとなく使って答えが出たに過ぎない．ロピタルの定理を適用できる条件は何か，よく考えて問題を解くようにしてほしい．
- ロピタルの定理は 5 月 21 日の講義で解説した．この問題は p.33 の例 (4) の類題だ．

**2** (1) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ の $x = 0$ における $n = 3$ の場合のテイラーの定理を記述せよ．

【解答例】 一般化された二項係数は

$$\binom{1/3}{0} = 1, \quad \binom{1/3}{1} = \frac{1}{3}, \quad \binom{1/3}{2} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!} = -\frac{1}{9}$$

$$\binom{1/3}{3} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!} = \frac{5}{81}, \quad \binom{1/3}{4} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!} = -\frac{10}{243}$$

よって

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + R_3(x), \quad R_4(x) = -\frac{10}{243}x^4(1+\theta x)^{1/3-4}$$

【コメント】

- テイラーの定理では関数を $n$ 次多項式と $R_{n+1}(x)$ の和として記述する．この問題では $x = 0$ におけるテイラーの定理なのでその多項式の部分の $k$ 次の項は $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ である．$f(x) = (1+x)^\alpha$ のときは $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ なので

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k = \binom{\alpha}{k}x^k$$

  である．ゆえに $x = 0$ における $n = 3$ の場合のテイラーの定理は

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + R_4(x), \quad R_4(x) = \binom{\alpha}{4}x^4(1+\theta x)^{\alpha-4}$$

  となる．$\alpha = 1/3$ とすれば解答を得る．
- $\binom{\alpha}{k}$ は組み合わせの一般化で一般化された二項係数と呼ぶが，残念ながら使った人はいなかった．組み合わせの定義は知っているはずなので難しいこととは思えないのだが．このような記号は具体的な 1/3 という値よりも $\alpha$ でやったほうが表示がシンプルになるので理解しやすい．こういうことは自分自身で考えないと分からない．
- $k$ 次の項を $\frac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k$ とすると多項式にならない．一度でも具体的問題にあたっていればおかしいことに気が付くはずだ．

**2** (2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(\sqrt[3]{1+x} - (a + bx + cx^2 + dx^3)\right)$ が収束するように $a, b, c, d$ の値を定めよ．またその時の極限を求めよ．

【解答例】 (1) の結果から $a = 1,\ b = 1/3,\ c = -1/9,\ d = 5/81$ とすれば

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(\sqrt[3]{1+x} - (a + bx + cx^2 + dx^3)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} -\frac{10}{243}(1+\theta x)^{-11/4} = -\frac{10}{243}$$

【コメント】

- (1) ができれば簡単な問題だ．特にいうことはない．
- この問題をロピタルの定理を使って解こうとした人がいる．各段階で 0/0 型不定形になるための条件として $a, b, c, d$ の値を決めることができる．ただし，作業は大変だし感覚も悪い．この方法で正解にたどり着いた人はいなかった．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (3) (1) の結果を利用して $\sqrt[3]{1.3}$ の近似値を求めよ（誤差の考察を忘れないこと）.

【解答例】 (1) の結果に $x = 0.3 = 3 \times 0.1$ を代入する.

$$\sqrt[3]{1.3} = 1 + 0.1 - 0.01 + \frac{5}{3}0.001 + R_4(0.3) \quad R_3(0.3) = -\frac{1}{3}0.001(1 + \theta 0.3)^{-11/3}$$

最初の 4 つの項の和は $1.091666\cdots$，誤差の $R_4(0.3) = -0.000333\cdots(1 + \theta 0.3)^{-11/3}$ なので $0 > R_4(0.3) > -0.000333\cdots$ であり $1.091666\cdots > \sqrt[3]{1.3} > 1.091333\cdots$ となる．これを小数点以下第 4 位で四捨五入すれば 1.091 または 1.092 である.

【コメント】

- $0.3 = 3 \times 0.1$ なので各項で約分ができ計算が簡単になる.
- 解答例にあるように小数点以下第 4 位で四捨五入した時の値は一通りには決められない．小数点以下第 3 位で四捨五入して 1.09 とするのも間違いとは言えない．ただし誤差を考えるとこの理解は少しもったいない．なお近似値を取り扱う場合 $1.0915 \pm 0.000166\cdots$ という表示もよく使われる.
- 誤差の評価は難しい課題だが重要なことなので理解しておくように.
- 大問 2 は 5 月 14 日のレポート課題として出題した問題だ．授業に真面目に取り組んでいればこのような問題が出題されることは当然予想できるはずだ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次で定義される関数 $f(x)$ について，その導関数を求めよ．また導関数の連続性を調べよ（$x = 0$ の時と $x \neq 0$ の時を分けて議論すること）.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

【解答例】 $x \neq 0$ のとき $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ である．$x = 0$ のときは

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$$

より $f'(0) = 0$ である．$f'(x)$ の $x \to 0$ でのふるまいを考えると，第 1 項は 0 に収束するが，第 2 項は $-1$ から 1 の範囲で変動してしまう．よって $\lim_{x \to 0} f'(x)$ は収束せず，$f'(x)$ は $x = 0$ で不連続である．$x \neq 0$ では $f(x)$ は連続関数の差積合成で記述されているので連続である.

【コメント】

- $x \neq 0$ での $f'(x)$ の計算とその連続性は簡単なことだ．なお $f(x)$ の連続性を考察している答案があったが導関数の連続性を聞いているので解答になっていない.
- $f'(0)$ は微分の定義によって計算するが，その考察をした人はほとんどいなかった．$f(0) = 0$ で定数だから $f'(0) = 0$ というのは全く意味のない解答だ．どんな関数も $f(0)$ は定数だが，だからといって $f'(0) = 0$ とは限らない．例えば次の例を見ればよい.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ 2 & (x = 1) \end{cases}$$

$f(1) = 2$ で定数だが $f'(1) = 1$ だ．分からなければ $x \neq 1$ の時の式を約分してみると良い．

- この問題は 4 月 16 日の講義メモの 5 に記述している．微分という概念と微分計算の違いを理解するための重要な例として紹介した．