理系基礎科目「微分積分 I」（工学部機械 2 組）第 2 回試験（7 月 30 日実施）解答例とコメント

1 (1) を 10 点，他の問題を 15 点の配点とした．平均点は 49.98 点で，30 点を合格点とした．

1 次の不定積分，定積分，広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^6}{x^4-1}dx$

【解答例】 $\dfrac{x^6}{x^4-1} = x^2 + \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$ より

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{1/4}{x-1} + \frac{-1/4}{x+1} + \frac{1/2}{x^2+1}$$

と部分積分する．よって

$$\int \frac{x^6}{x^4-1}dx = \int x^2 + \frac{1/4}{x-1} + \frac{-1/4}{x+1} + \frac{1/2}{x^2+1}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

【コメント】

- 割り算により分子の次数を分母より小さくしてから部分分数展開を行うこと．他な基本的な問題なので特にコメントはつけない．

1 (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+2\cos x+2\sin x}$

【解答例】 $u = \tan\frac{x}{2}$ とおけば

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2},\ dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

より

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x+2\sin x} = \int \frac{2}{3(1+u^2)+2(1-u^2)+4u}du = \int \frac{2}{(u+2)^2+1}du = 2\tan^{-1}(u+2)$$
$$= 2\tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}+2\right) + C$$

【コメント】

- $u = \tan(x/2)$ の置換を使う問題．この置換により $\cos x$, $\sin x$, dx がどう変換されるのかは単に暗記するのではなく自分で導けるようにしておくこと．
- 不定積分で置換積分を使った場合，元の変数に戻すように．

1 (3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

【解答例】 $\sqrt{x^2+4} = u - x$ と置換積分する．$x = \frac{u}{2} - \frac{2}{u} = \frac{u^2-4}{2u}$ なので

$$\sqrt{x^2+4} = \frac{u^2+4}{2u},\quad dx = \frac{u^2+4}{2u^2}du$$

である．また $x=1$ のとき $u=1+\sqrt{5}$，$x=2$ のとき $u=2+2\sqrt{2}$ なので

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \int_{1+\sqrt{5}}^{2+2\sqrt{2}} \frac{2u}{u^2-4}\frac{2u}{u^2+4}\frac{u^2+4}{2u^2}du = \int_{1+\sqrt{5}}^{2+2\sqrt{2}} \frac{2}{u^2-4}du = \frac{1}{2}\int_{1+\sqrt{5}}^{2+2\sqrt{2}} \frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\log\frac{|u-2|}{|u+2|}\right]_{1+\sqrt{5}}^{2+2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} - \log\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+3}\right) = \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}+2)$$

【コメント】

- 最後の式はどこまで整理すべきか悩ましい．ただ，原始関数に代入しただけというのはいただけない．一定の簡略化は行うべきだろう．
- この問題は $\sqrt{x^2+4}=u$ とおいても計算できる．計算してみよ．
- 定積分の置換積分では積分域の考慮が必要になる．これを怠る人がいるが重大な誤りだ．

1 (4) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

【解答例】 $3+2x-x^2=(3-x)(x+1)$ なので $u=\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$ と置換積分する．$x=\frac{3-u^2}{u^2+1}$ なので

$$\sqrt{3+2x-x^2}=(x+1)u=\frac{4u}{u^2+1} \qquad dx=-\frac{8u}{(u^2+1)^2}du$$

である．また $x=1$ のとき $u=1$，$x=3$ のとき $u=0$ である．

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int_1^0 \frac{u^2+1}{4u}\frac{-8u}{(u^2+1)^2}du = \int_0^1 \frac{2}{u^2+1}du = \left[2\tan^{-1}u\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

【コメント】

- 被積分関数は $x\to 3-0$ で無限大に発散している．広義積分である．しかし，置換積分した結果は広義積分ではない．
- $\sqrt{3+2x-x^2}$ を u の式に直すには，$(x+1)u=(x+1)\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}=\sqrt{(3-x)(x+1)}$ を利用する．$x=\frac{3-u^2}{u^2+1}$ を代入してもいいが，計算ははるかに複雑だ．
  このようなちょっとした計算の工夫は，自分で計算してみないと気が付かない．講義で扱った問題をすべて自力で計算し，計算過程を講義メモの計算と比べれば納得できると思うのだが．

2 放物線 $y^2=4kx$, $k>0$ の頂点 $(0,0)$ から放物線上の点 $(a,2\sqrt{ka})$, $a>0$ までの曲線の長さを求めよ．

【解答例 1】通常の x,y の役割を入れ替えて，$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ を $0\leqq y\leqq 2\sqrt{ka}$ まで積分すればよい．

$$\int_0^{2\sqrt{ka}} \sqrt{1+(y/(2k))^2}dy$$

$\frac{y}{2k}=u$ と置換積分すれば

$$\int_0^{\sqrt{a/k}} \sqrt{1+u^2}2kdu = k\left[u\sqrt{1+u^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2})\right]_0^{\sqrt{a/k}} = \sqrt{a}\sqrt{k+a}+k\log\left(\sqrt{\frac{a}{k}}+\sqrt{1+\frac{a}{k}}\right)$$

【解答例 2】 $y = 2\sqrt{kx}$ より $y' = \sqrt{k/x}$ だ．よって求める曲線の長さは

$$\int_0^a \sqrt{1+\frac{k}{x}}dx$$

で求められる．この積分は $\sqrt{1+(k/x)} = u$ と置換積分することにより計算できる．以下省略．

【コメント】

- 少し煩雑な計算になりすぎたようだ．この問題を完全に解けた人はいなかった．
- $\int \sqrt{x^2+1}dx$ の計算は $\sqrt{x^2+1} = u - x$ と置くことにより計算できる．ここでは部分積分による計算を紹介しよう．

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

ここで $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log(x+\sqrt{x^2+1})$ を使えば

$$2\int \sqrt{x^2+1}dx = x\sqrt{x^2+1} + \log(x+\sqrt{x^2+1})$$

$\boxed{3}$ a を正の数とする．極座標によって $r^2 = a^2\cos 2\theta,\ -\pi/4 \leqq \theta \leqq \pi/4$ で表される曲線により囲まれる部分の面積を求めよ．

【解答例】 極座標による面積は $r^2/2$ を積分すればいいので

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}$$

【コメント】

- 極座標で表示された曲線による面積の求め方を知っていれば簡単に計算できる．

$\boxed{4}$ (1) 関数 $f(x)$ のリーマン和とは何か説明せよ．
(2) 積分がリーマン和の極限であることを利用して，$f(x) \leqq g(x)$ ならば $\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$ が成り立つことを示せ．

【解答例】 (1) 区間 $[a,b]$ を $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ と分割し，$a_{j-1} \leqq c_j \leqq a_j$ を満たす c_j をとる．このとき

$$\sum_{j=1}^{n} f(c_j)(a_j - a_{j-1})$$

をリーマン和という．

(2) $f(x) \leqq g(x)$ であれば，$f(c_j) \leqq g(c_j)$ なのでリーマン和について

$$\sum_{j=1}^{n} f(c_j)(a_j - a_{j-1}) \leqq \sum_{j=1}^{n} g(c_j)(a_j - a_{j-1})$$

が成り立つ．定積分はリーマン和の極限なので次が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$$

【コメント】

- 言葉で説明しようとする人が多いが，式で書けないと数学の議論には使えない．式で記述するためには，表示に必要なデータ（a_j, c_j など）を文字で置かなくてはならない．それによって数学の議論は明快になる．