微分積分 II 講義メモ (12 月 22 日)

前回のレポート課題

6.2.1(1)　積分域は原点中心の半径 1 の円なので極座標による積分域は $E: 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とすればよい．

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}dr = 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}dr = 2\pi[\sqrt{1+r^2}]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)\pi$$

6.2.1(2)　極座標による積分域は $E: a \leqq r \leqq b,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とすればよい．

$$\int_a^b dr \int_0^{2\pi} e^{r^2} r dr = 2\pi \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_a^b = \pi\left(e^{b^2} - e^{a^2}\right)$$

6.2.1(3)　D は $(a, 0)$ を中心とする半径 a の円板の上半分である．この円は原点において y 軸に接するので θ の範囲は $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ である．θ を固定した時の r の動く範囲は弦の長さが $2a\cos\theta$ であることから $0 \leqq r \leqq 2a\cos\theta$ である．よって極座標での積分域は $E: 0 \leqq \theta \leqq \pi/2,\ 0 \leqq r \leqq 2a\cos\theta$ である．

$$\iint_D xydxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^3 \cos\theta \sin\theta dr = 4a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^5\theta \sin\theta d\theta = 4a^4 \left[-\frac{1}{6}\cos^6\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{2a^4}{3}$$

6.2.2(1)　$x+y=u,\ x-y=v$ と変換すれば $x=(u+v)/2,\ y=(u-v)/2$ である．

積分域　$E: 0 \leqq u \leqq 2,\ 0 \leqq v \leqq 2$

被積分関数　ve^u

積分要素　$dxdy = |x_u y_v - x_v y_u| dudv = (1/2)dudv$

より

$$\iint_E \frac{1}{2} ve^u dudv = \left(\int_0^2 e^u du\right)\left(\int_0^2 \frac{v}{2}\right) dv = e^2 - 1$$

6.2.2(2)　積分の変数変換は (1) と同じにとる．

積分域　$E: 0 \leqq u \leqq \pi,\ 0 \leqq v \leqq \pi$

被積分関数　$u^2 \sin v$

積分要素　$dxdy = |x_u y_v - x_v y_u| dudv = (1/2)dudv$

$$\iint_E \frac{1}{2}u^2 \sin v dudv = \left(\int_0^\pi \frac{\sin v}{2} dv\right)\left(\int_0^\pi u^2 du\right) = \frac{\pi^3}{3}$$

6.2.2(3)　極座標を少し変形して $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ と変数変換する．

積分域　D を定義する不等式は $r^2 \leqq 1$ となる．(r, θ) は $(x/a, y/b)$ の極座標なので，$0 \leqq r$ と $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の 2 つの条件を付けくわえる．変数変換後の積分域は $E: 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ である．

被積分関数　$a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta = r^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)$

積分要素　$dxdy = |x_r y_\theta - x_\theta y_r| drd\theta = abrdrd\theta$

$$\left(\int_0^{2\pi} a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta d\theta\right)\left(\int_0^1 abr^3 dr\right) = \frac{ab}{4}\frac{a^2+b^2}{2}2\pi = \frac{ab(a^2+b^2)}{4}\pi$$

なお，6.2.2 の各問題では長方形領域での 1 変数関数の積の積分（12 月 17 日の講義メモの 3）を用いている．

本日の講義の要点

1. 重積分の応用 (体積)

   2 つの連続関数 $z = f(x,y)$ と $z = g(x,y)$ のグラフが xy 平面の領域 D の上で囲む部分の体積は $f(x,y) \geqq g(x,y)$ という条件のもとに

   $$\iint_D f(x,y) - g(x,y)dxdy$$

   で与えられる．これは次のような形で理解できる．

   - D を有限個の小領域 D_j, $1 \leqq j \leqq N$ に分割する．各 D_j に点 $(x_j, y_j) \in D_j$ をとる．
   - 考える立体を D_j によって分割すれば，これは底面 D_j 高さ $f(x_j,y_j) - g(x_j,y_j)$ の柱体で近似できる．
   - 柱体の体積は底面積×高さなので求める体積 V は

     $$V \fallingdotseq \sum_{j=1}^{N} \Big(f(x_j,y_j) - g(x_j,y_j)\Big)\mu(D_j) \qquad \mu(D_j) = D_j\text{の面積}$$

     である．これは $f(x,y) - g(x,y)$ についてのリーマン和に他ならない．
   - $f(x,y) - g(x,y)$ は連続なので積分可能である．よってリーマン和の極限は重積分として与えられる．これは求める立体の体積である．

     $$V = \iint_D f(x,y) - g(x,y)dxdy$$

   求めたいものを細かく分ける．分けた一つ一つを分かりやすいもので近似する．その和がリーマン和の形になっていれば，分割を細かくしていった時の極限が重積分で求められる．これが応用の考え方だ．リーマン和がカギとなることに注意すること．

   例として例題 6.9 を開設した．特にいうことはない．

2. 重積分の応用 (曲面積)

   $f(x,y)$ を C^1 級関数とする．$z = f(x,y)$ のグラフは滑らかな曲面であり，その D の上方にある部分を S とおく．S の面積を求めたい．

   - D を有限個の小領域 D_j, $1 \leqq j \leqq N$ に分割する．各 D_j に点 $(x_j, y_j) \in D_j$ をとる．
   - D_j の上方にある S の部分を S_j とおく．S の面積は S_j の面積の総和である．
   - S_j を $(x_j, y_j, f(x_j,y_j))$ における接平面の D_j の上方にある部分 S'_j で近似する．
   - 面 S'_j の水平面とのなす角 θ_j はそれぞれの法線ベクトルのなす角に等しい．S'_j の法線ベクトルは $(-f_x(x_j,y_j), -f_y(x_j,y_j), 1)$ なので，水平面の法線ベクトル $(0,0,1)$ と内積をとることにより

     $$1 = \sqrt{1 + (f_x(x_j,y_j))^2 + (f_y(x_j,y_j))^2}\cos\theta_j$$

   - S'_j は D_j をある方向に $1/\cos\theta_j$ 倍に引き伸ばしたものなので

     $$\mu(S'_j) = \frac{1}{\cos\theta_j}\mu(D_j) = \sqrt{1 + (f_x(x_j,y_j))^2 + (f_y(x_j,y_j))^2}\mu(D_j)$$

     が成り立つ．ここで $\mu(S'_j)$ は S'_j の面積を表す．$\mu(D_j)$ も同様である．
   - 以上を組み合わせれば求める面積は

     $$\sum_{j=1}^{N}\mu(S_j) \fallingdotseq \sum_{j=1}^{N}\mu(S'_j) = \sum_{j=1}^{N}\sqrt{1 + (f_x(x_j,y_j))^2 + (f_y(x_j,y_j))^2}\mu(D_j)$$

     だが，最後の式は $\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}$ に関するリーマン和である．

- $f(x,y)$ は C^1 級なので $\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}$ は連続である．よって積分可能であり，分割を細かくしていった時の極限は重積分で与えられる．

$$\mu(S) = \iint_D \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}dxdy$$

ここでも，面積が求められる根拠として重積分の定義（リーマン和の極限）が使われていることに注意せよ．計算方法ばかり気にしていると，このような応用の根拠を理解できない．

3. 曲面積の計算例

例題 6.10 の解答はテキストに記述してあるので省略する．6.4.2(1) を解説する．求めるものは $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ のグラフの $D : x^2+y^2 \leqq a^2-b^2$ の部分の面積である．

$$1+(z_x)^2+(z_y)^2 = 1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2} = \frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}$$

より曲面積は

$$\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

で求められる．これは極座標を利用すれば簡単に計算できる．

$$\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} dr \int_0^{2\pi} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}d\theta = 2\pi a \int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr = 2\pi a\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{\sqrt{a^2-b^2}} = 2\pi a(a-b)$$

今日の講義でこの授業で扱うべき内容はすべて終了した．次回は 3 変数に拡張する場合の注意点の他，試験に向けて学習しておくべき事項の解説を行う．

本日のレポート課題

p.135 の 6.4.1 と 6.4.2 を課題にする．なお，6.4.2(1) は講義で扱ったので解答しなくてよい．