微分積分 II 講義メモ (1 月 21 日)

前回のレポート課題

6.4.1(1)　$z = x^2 + y^2$ のグラフは xz 平面の放物線 $z = x^2$ を z 軸の周りに回転して得られる回転面である．平面 $z = 1$ とで囲む領域は $x^2 + y^2 \leqq 1$ 上で下面を $z = x^2 + y^2$ のグラフ，上面を $z = 1$ とする立体である．よって体積は

$$\iint_D 1 - x^2 - y^2 dxdy \qquad D : x^2 + y^2 \leqq 1$$

で求められる．極座標に変換すれば

積分域　$E : 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

被積分関数　$1 - r^2$

積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

なので

$$\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r(1 - r^2)dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

6.4.1(2)　与えられた立体は $D : x^2 + y^2 \leqq b^2$ の上で，上面を $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，下面を $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ とする立体である．xy 平面に関し対称な立体なので，上半分を求めて 2 倍すればよい．

$$2\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy \qquad D : x^2 + y^2 \leqq b^2$$

これも極座標に変換する．

積分域　$E : 0 \leqq r \leqq b,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

被積分関数　$\sqrt{a^2 - r^2}$

積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

より

$$2\int_0^b dr \int_0^{2\pi} r\sqrt{a^2 - r^2} d\theta = 4\pi \left[-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{3/2}\right]_0^b = \frac{4\pi}{3}\left(a^3 - (a^2 - b^2)^{3/2}\right)$$

6.4.1(3)　この問題は 3 重積分の問題でありレポート課題にすべきではなかった．申し訳ない．

$$\iiint_D dxdydz \qquad D : 0 \leqq x + y \leqq 1,\ 0 \leqq y + z \leqq 1,\ 0 \leqq x + z \leqq 1$$

これを $x + y = u,\ y + z = v,\ z + x = w$ とおいて変数変換する．

積分域　$E : 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1,\ 0 \leqq w \leqq 1$

被積分関数　1

積分要素　u, v, w を x, y, z に移す線形写像の行列式が $-1/2$ なので $dxdydz = (1/2)dudvdw$（積分要素の比は行列式の絶対値）

これから 1/2 の 1 辺の長さ 1 の立方体上での積分になるので値は 1/2 である．

6.4.2(2)　立体の考察は 6.4.1(1) と同じである．曲面積は $D : x^2 + y^2 \leqq 1$ の上で $\sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ を積分すればよい．

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy \qquad D : x^2 + y^2 \leqq 1$$

積分域　$E : 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

被積分関数　$\sqrt{1+4r^2}$

積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

$$\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

6.4.2(3)　$D : x^2 + y^2 \leqq a^2$ の上で $\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$ を積分すればよい．

積分域　$E : 0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

被積分関数　$\sqrt{1+r^2}$

積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

$$\int_0^a dr \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+r^2}dr = 2\pi\left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{3/2}\right]_0^a = \frac{2}{3}((1+a^2)^{3/2}-1)$$

本日の講義の要点

今日の講義では 3 重積分の扱いを簡単に紹介した．定義も含めて論理の展開の仕方は 2 重積分の場合と同様なので，実質的に 2 重積分の復習を兼ねている．

- 定義はリーマン和の極限である．2 重積分では領域を縦横に細分するが，3 重積分の場合は縦横に加えて上下にも細分しなくてはならない．ジャガイモをキューブ上に切り分けることをイメージすればよい．
- リーマン和の極限という積分の定義から累次積分が導かれる．
- 変数変換もリーマン和の考えから理解できる．この際，変換前の小立体の体積と，対応する変換後の小立体の体積の比を考えなくてはならない．ここでもこの体積の比はヤコビアン（1 階偏導関数の作る行列式）の絶対値で与えられる．

3 重積分の応用として 6.4.1(3) を解説した．前回のレポート課題の解答例に記述している．

今日で，微分積分 II の授業日程は試験を残すのみになった．範囲は積分のみなので関係するレポート課題をきちんと解いておくこと．どうしても正しい答えにたどり着けないという人は遠慮なく質問に来てほしい．計算ミスのみならいいのだが，ひどい勘違いをしている場合もある．