微分積分 II 講義メモ (10 月 1 日)

この講義では 2 変数関数を中心に多変数関数の微分積分に関する基本事項を解説する．概念は新しいが計算は簡単なので，高校の時に数学 III が苦手だったという人も特に大きなハンデはない．新しい内容を一つずつ理解していくようにしてほしい．

本日の講義の要点

1. 2 変数関数のグラフ
   主に 2 変数関数を扱う理由の一つに，グラフが座標空間内の曲面として理解できることがある．まずグラフの具体例を解説した．（テキストには記載なし）
   - 関数 $z = f(x, y)$ のグラフとは座標空間における点 $(x, y, f(x, y))$ たちの作る図形である．このとき，xy 平面は水平面，z 座標は高さとみなす．
   - 定数関数 $z = c$ のグラフは高さ c の水平面である．
   - 1 次関数 $z = ax + by + c$ のグラフは平面である．z 軸上の点 $(0, 0, c)$ はこの平面の上にあり，これを z 切片という．
     x を 1 増やすと z は a だけ増える．ゆえに y 軸に垂直な平面で切った切り口の直線の傾きは a であり，これを x 方向の傾きと呼ぶ．同様に b は y 方向の傾きである．
   - 一般に $z = f(x, y)$ のグラフを理解するには高さ c の等高線 $f(x, y) = c$ の形を調べるのが有効である．
     - $z = 2x^2 - y^2$ について，等高線はすべて原点を中心とする楕円である．x 軸上での断面図は上開きの放物線 $z = 2x^2$ であり y 軸上での断面図はやはり上開きの放物線 $z = y^2$ である．ゆえにこの曲面は放物線の回転面を一方向にゆがめたものになっている．$(0, 0)$ で極小である．
     - $z = 2x^2 - y^2$ について，高さ 0 の等高線は 2 直線 $y = \pm\sqrt{2}x$ である．他の高さの等高線はすべて原点を中心とする双曲線であり，漸近線は $y = \pm\sqrt{2}x$ である．x 軸上での断面図は上開きの放物線 $z = 2x^2$ であり y 軸上での断面図は下開きの放物線 $z = -y^2$ である．この曲面を地形として考えた時 $(0, 0)$ は峠になっている．このような点を鞍点という．
     - $z = -2x^2 - y^2$ のグラフは最初のグラフの上下を逆転させたグラフである．
   - 無理関数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ のグラフは，原点中心で半径 1 の球面の上半分である．
2. 平面内の集合に関する用語
   平面内の集合は多様であるが，ここではいくつかの滑らかな曲線で囲まれた集合（あるいはそれからいくつかの点を除いた集合）のみ考えることにする．境界，内部，外部，閉集合，開集合という言葉を紹介したがこれらは直感的に理解しておけば良い．
3. 2 変数関数の極限，連続性
   極限 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ は直感的に理解しておいてくれればよい．また連続性も $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ も直感的に理解しておくこと．講義では例題 5.2 を解説した．
   - $(x, y) \to (0, 0)$ での極限を調べるには極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r \geqq 0$ を利用して $r \to 0$ の極限を考えれば良い．（r は原点との距離であることに注意せよ ）
   - 例題 5.2(1) の関数について，$(x, y) \neq (0, 0)$ のとき
     $$f(x, y) = \cos\theta\sin\theta$$
     となる．これは $r \to 0$ としても θ の値によって $-1/2$ から $1/2$ までのあらゆる値をとることにな

る．$(x,y)\to(0,0)$ で $f(x,y)$ が一定の値に近づくとは言えないので，$f(x,y)$ の極限は存在せず不連続である．この事情は p.86 図 5.4 を見てほしい．

- 例題 5.2(2) について，(1) と違い分母が r なので $f(x,y)=r\cos\theta\sin\theta$ である．ゆえに $0\leqq|f(x,y)|\leqq r/2$ が成り立つので $r\to 0$ のときこれは 0 に収束する．よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$ でありこの関数は $(0,0)$ で連続である．

本日のレポート課題とヒント

演習問題の 5.1.3 を課題とする．提出締め切りは 10 月 6 日 (火)12 時，提出は教養科目等事務室（全学教育棟 A 棟 4 階）の前にレポート提出箱があるのでそこに入れること．授業科目名と担当教員名を確認して入れ間違えが無いようにしてほしい．

5.1.3 次の関数の点 $(0,0)$ での連続性について調べよ．

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$

(2) $g(x,y)=\begin{cases}xy\log(x^2+y^2) & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$

締め切りに遅れた場合は研究室（理学部 3 号館 4 階 D416）まで持ってきてほしい．締め切りにはたいした意味があるわけではないので受け取る．ただし，添削の都合上，あまり授業の直前に持ってこられても対応できない．やはり締め切りは守ってほしい．

ヒントについてだが，どちらも極座標を利用する．例題 5.2 を参考にすること．なお $\lim_{r\to+0} r\log r=0$ である．ロピタルの定理の応用として前期に解説済みである．