

微分積分Ⅱ講義メモ(10月8日)

前回のレポート課題について

2変数の関数の連続性を調べる問題(p.87 演習問題 5.1.3)を出題した。いずれも極座標を使って考察する問題だ。(1)は $(x, y) \neq (0, 0)$ で

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r^2} = \cos 2\theta$$

なので、とる値は偏角 θ のみで決まる。ゆえに $(0, 0)$ にいくら近づけても $f(x, y)$ の取る値は偏角によって -1 から 1 までの任意の値をとる。

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$$

は成立せず $(0, 0)$ で不連続である。

(2)は $(x, y) \neq (0, 0)$ で

$$g(x, y) = xy \log(x^2 + y^2) = r^2 \cos \theta \sin \theta \log r^2 = \sin 2\theta r^2 \log r$$

である。 $0 \leq |g(x, y)| \leq r^2 |\log r|$ であり $\lim_{r \rightarrow +0} r^2 \log r = 0$ なので挟み撃ちにより

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) = 0 = g(0, 0)$$

が成り立つ。よって連続である。

【コメント】

- 極座標はこの手の問題に強力な手段になる。ただし万能というわけではない。5.1.4ではうまくいかない。
- 次のような表記をする人が多いが厳密には間違いである。ただし、「一定の値に近づかない」という表記があれば正解とみなせるだろう。あまりうるさいことは言いたくない。

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

- (2)では挟み撃ちを使ってほしい。 $r^2 \log r$ が 0 に収束したとしても、それに定数以外のものがかかっているときは全体が 0 に収束するとは言えない。
- $\lim_{r \rightarrow +0} r^2 \log r = 0$ はロピタルの定理で証明できる。テキスト p.33 を見る。前期の講義でも解説済みだ。なお $r^2 \rightarrow 0$ だからという理由は誤りだ。結論が正しくても論理が正しくなければ正解にはできない。

本日の講義の要点

1. 偏微分 (p.88)

- 偏微分の定義は p.88 に記述されている。 x で偏微分するとは y を固定して(定数とみなして) x で微分することなので分かりやすいだろう。記号について p.88 の一番下にまとめられているので確実に使ってほしい。
- 偏微分は x 方向(y 方向)に動かした時の変化率に過ぎないので、偏微分可能だけでは連続性すら保証されない。この状況が例題 5.3 に記述されている。

2. 全微分（テキストに記載なし）

$z = f(x, y)$ のグラフが $(a, b, f(a, b))$ において滑らかならその点で接する接平面が存在するはずだ。接平面とグラフの平面 $y = b$ による切り口は、 xz 平面での曲線 $z = f(x, b)$ とその接線になる。1 変数関数の接線の傾きは微分係数に他ならないので、切り口の接線の傾きは $f_x(a, b)$ になる。これが節平面の x 方向での傾きであり、接平面の方程式は

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

で表される。この平面が $(a, b, f(a, b))$ を通っていることに注意せよ。

全微分可能性は、この 1 次式が実際に 1 次近似式であることを意味する。すなわち誤差を

$$\rho(x, y) = f(x, y) - f(a, b) - f_x(a, b)(x - a) - f_y(a, b)(y - b)$$

とにおいて

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{\rho(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

が成り立つこととして定義する。ぶんぽは (x, y) と (a, b) の距離なので分子が距離に比べて圧倒的に小さくなることを意味している。

論理的には全微分が微分の多変数への拡張である。全微分可能を単に微分可能ということもある。

3. C^1 級関数の全微分可能性

偏導関数 f_x, f_y がともに存在し連続であるとき、 $f(x, y)$ を C^1 級関数という。講義では次の定理を証明した。

定理 C^1 級関数は全微分可能である。

これからグラフは滑らかであり接平面が存在する。さらに連続にもなる。テキストには証明なしに連続性のみが述べられている (定理 5.5) がこれでは全く不十分である。講義でこの事実を証明したので、講義メモにも記述しておく。

- $x = a + h, y = b + k$ とおく。これによって全微分の定義を書き直すと

$$\rho(x, y) = \rho(a + h, b + k) = f(a + h, b + k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k$$

とにおいて

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\rho(a + h, b + k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

が示すべきことである。

- $F(x) = f(x, b + k)$ とおく。 f は x について偏微分可能なので、 F は微分可能である。ゆえに平均値定理より

$$f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = F(a + h) - F(a) = F'(a + \theta_1 h)h = f_x(a + \theta_1 h, b + k)h$$

同様に $G(y) = f(a, y)$ とおく。 f は y について偏微分可能なので、 G は微分可能である。ゆえに平均値定理より

$$f(a, b + k) - f(a, b) = G(b + k) - G(b) = G'(b + \theta_2 k)k = f_y(a, b + \theta_2 k)k$$

- この2式の和をとって ρ の定義式に代入すれば

$$\rho(a+h, b+k) = (f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a, b))h + (f_y(a, b+\theta_2 k) - f_y(a, b))k$$

となるが f_x, f_y の連続性から $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ のとき、上の式における h, k の係数は0に収束する。
 $h/\sqrt{h^2+k^2}, k/\sqrt{h^2+k^2}$ はともに絶対値1以下なので、 $\rho(a+h, b+k)/\sqrt{h^2+k^2}$ も0に収束する。
 ゆえに f は全微分可能である。

この定理のおかげでいちいち全微分可能性のチェックを行う必要がなくなる。例えば例題 5.3 の関数は $(0, 0)$ 以外では C^1 級であり全微分可能である。

4. 合成関数の微分（連鎖法則）

$z = f(x, y)$ と $x = x(t), y = y(t)$ の合成関数 $z = f(x(t), y(t))$ について、 z が x, y の一次式で近似され、 x, y が t の一次式で近似されれば z は t の一次式で近似されるだろう。この発想を使って合成関数の微分 定理 5.8 を解説した。一次式は行列で書けること、一次式の合成は行列の積で記述できることから合成関数の微分は行列を利用するときれいに整理して記述できる。詳しくは次回解説する。

本日のレポート課題とヒント

p.93 の 5.2.1 を課題にする。偏微分計算の問題なので一方を定数だと思って微分すればよい。ヒントは不要だろう。なおテキストを入手できていない人もいるかもしれないので問題を記述しておく。

$$(1) f(x, y) = x^5 y^2 + 3x^3 y \quad (2) f(x, y) = \frac{x}{x-y} \quad (3) f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4xy + y^2}$$

$$(4) f(x, y) = \log_y x \quad (5) f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (6) f(x, y) = \int_y^x e^{t^2} dt$$