微分積分 II 講義メモ (10 月 15 日)

前回のレポート課題について

偏微分の計算問題（p.93 演習問題 5.2.1）を出題した．x で偏微分するとは y を定数とみなして x で微分することなので，1 変数の微分の知識で簡単に答えられる．計算過程は省略しいくつかコメントをつける．

【コメント】

- $\log_y x$ の y による偏微分では
$$(\log_y x)_y = \left(\frac{\log x}{\log y}\right)_y = -\log x \frac{1}{(\log y)^2}\frac{1}{y} = -\frac{\log x}{y(\log y)^2}$$
だが，この $1/y$ をかけることを忘れる人が多かった．合成関数の微分を繰り返すとき，中身の微分を忘れないようにすること．
- $\int e^{t^2}dt$ は初等関数では表せない（理由は難しい）ので，積分計算で原始関数を求めることは不可能である．ただし原始関数が存在することは確かだ（連続関数は積分可能）．原始関数を具体的に求めて考えるという人が目につくが，求められたということは重大なミスを犯していることに他ならない．この問題では $\int e^{t^2}dt = F(t)$ とおき
$$f(x,y) = \int_y^x e^{t^2}dt = F(x) - F(y)$$
とおいて偏微分すればよい．なお $F'(x) = e^{x^2}$ である．

本日の講義の要点

1. 偏微分 (p.88)
   - 偏微分の定義は p.88 に記述されている．x で偏微分するとは y を固定して（定数とみなして）x で微分することなので分かりやすいだろう．記号について p.88 の一番下にまとめられているので確実に使ってほしい．
   - 偏微分は x 方向（y 方向）に動かした時の変化率に過ぎないので，偏微分可能だけでは連続性すら保証されない．この状況が例題 5.3 に記述されている．
2. 合成関数の微分（連鎖法則）

   定理 5.9 を念頭に次のように解説した．
   - $x = \varphi(u,v)$ が $(u,v) = (\alpha,\beta)$ で全微分可能とする．これは 1 次近似式が存在するということなので
   $$x = \varphi(u,v) \fallingdotseq \varphi(\alpha,\beta) + \varphi_u(\alpha,\beta)(u-\alpha) + \varphi_v(\alpha,\beta)(v-\beta)$$
   が成り立つ．
   - $y = \psi(u,v)$ も $(u,v) = (\alpha,\beta)$ で全微分可能とする．同様に
   $$y = \psi(u,v) \fallingdotseq \psi(\alpha,\beta) + \psi_u(\alpha,\beta)(u-\alpha) + \psi_v(\alpha,\beta)(v-\beta)$$
   が成り立つ．
   - $(a,b) = (\varphi(\alpha,\beta), \psi(\alpha,\beta))$ として以上 2 式を行列を使って書き直す．
   $$\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} \varphi_u(\alpha,\beta) & \varphi_v(\alpha,\beta) \\ \psi_u(\alpha,\beta) & \psi_v(\alpha,\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u-\alpha \\ v-\beta \end{pmatrix}$$

- $z=f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で全微分可能とする．これも一次近似可能ということなので

$$z=f(x,y)\fallingdotseq f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=f(a,b)+\begin{pmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b\end{pmatrix}$$

- この 2 つの式を組み合わせれば

$$z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\fallingdotseq f(\varphi(\alpha,\beta),\psi(\alpha,\beta))+\begin{pmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_u(\alpha,\beta) & \varphi_v(\alpha,\beta) \\ \psi_u(\alpha,\beta) & \psi_v(\alpha,\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u-\alpha \\ v-\beta\end{pmatrix}$$

- この式は z が u,v の 1 次式で近似されること（全微分可能であること）を示唆する．u,v の係数が (α,β) における偏微分係数であることから

$$\begin{pmatrix} z_u(\alpha,\beta) & z_v(\alpha,\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_u(\alpha,\beta) & \varphi_v(\alpha,\beta) \\ \psi_u(\alpha,\beta) & \psi_v(\alpha,\beta)\end{pmatrix}$$

  を得る．考える点の座標を省略すれば

$$\begin{pmatrix} z_u & z_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_x & z_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v\end{pmatrix}$$

  であり，これを成分表示すれば定理 5.9 になる．

合成関数の微分法は合成のパターンによって様々な表示になる（定理 5.7，5.8，5.9）．しかしこれらは一次近似の考えを利用すれば，一次近似可能な関数の合成がやはり一次近似可能であるということに他ならない．一次式が行列で表されること，一次式の合成は行列の積で表されることから合成関数の微分法は行列を使うときれいに表示できる．難しいが考えてみてほしい．

講義では具体例として例題 5.5 と演習問題 5.2.4(1) を扱った．これはできるようにしておくこと．

3. 高次の偏導関数

偏導関数も関数なのでさらにそれをさらに偏微分することを考える．定義はテキスト p.94 に記述されている．講義では $\sin(xy)$ の 2 次までの偏導関数を求めてもらった．この程度のことは簡単に計算できるようにしておくこと．

- f_{xy}，f_{yx} がともに存在し連続なら $f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つ (定理 5.10).
  この主張は連続性の仮定がないと成り立たない．例題 5.6 にその例が解説されているが難しい．
- n 次までの偏導関数がすべて存在し連続であるとき，$f(x,y)$ を C^n 級関数という．重要な概念なので覚えておくこと．
- C^n 級関数については n 次までの偏導関数は偏微分の順序によって変わらない（p.96 の例をみよ）．x,y についてそれぞれ何回偏微分したかのみで決まるので

$$\frac{\partial^{l+m}f}{\partial x^l \partial y^m} \qquad l+m\leqq n$$

  という記号を使う．

4. テイラーの定理（p.96 定理 5.11）

一変数の場合と同様に多変数においても微分の応用の基本はテイラーの定理である．式の形はテキストで確認しておくこと．

- $h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}$ は 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し，x で偏微分したものに h をかけ，y で偏微分したものに k をかけ，それらを加え合わせるという操作を意味する．ただし h,k は x,y と無関係な定数とみなす．すると，それらの m 乗はこの操作を m 回繰り返すこととして理解できる．

- 講義では 2 回繰り返してどうなるかを解説した．

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f=hf_x+kf_y$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)(hf_x+kf_y)=h^2f_{xx}+hkf_{xy}+khf_{yx}+k^2f_{yy}=h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}$$

  この式を見れば $(x+y)^2$ の展開式とよく似ていることに気づくだろう．実際にそれは正しく，定理 5.11 の中に記述されている式を（2 項定理の証明とほぼ同様に）数学的帰納法で示すことができる．
- さらに $(x,y)=(a,b)$ を代入すれば

$$\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a,b)=\sum_{l=0}^{m}\frac{\partial^m f}{\partial x^l\partial y^{m-l}}(a,b)\frac{h^l}{l!}\frac{k^{m-l}}{(m-l)!}$$

  となり，h,k の m 次式であることが良くわかる．テイラーの定理の多項式部分の一般項は

$$\frac{\partial^{p+q}f}{\partial x^p\partial y^q}(a,b)\frac{h^p}{p!}\frac{k^q}{q!}\qquad p+q\leqq n$$

  である．
- テイラーの定理による 1 次近似式は今まで述べたものに過ぎない．2 次近似式は

$$f(a+h,b+k)\fallingdotseq f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+f_{xx}(a,b)\frac{h^2}{2}+f_{xy}(a,b)hk+f_{yy}(a,b)\frac{k^2}{2}$$

テイラーの定理が何故成立するかについては次回解説する．

本日のレポート課題とヒント

p.93 の演習問題 5.2.4（(19) は授業で解説済み）と p.97 の 5.3.1 を課題にする．計算問題ばかりなので確実にやっておくように．