微分積分 II 講義メモ (10 月 29 日)

前回のレポート課題について

合成関数の微分を利用する問題と 2 次偏導関数の計算問題を出題した．いずれも基本的であり必ずやっておくこと．提出されたレポートについて何人かに計算力の問題を感じるがここでコメントするような全体的な問題はない．

本日の講義の要点

1. テイラーの定理（p.96 定理 5.11）

   前回はテイラーの定理が $n = 1, 2$ の場合にどのような形になるかを確認した．今回はテイラーの定理がどのように証明されるのかを解説した．若干難しい内容だが考えてみると良い．

   - 2 変数関数 $f(x, y)$ と関数 $\varphi(t) = (a + th,\ b + tk)$ を合成して $F(t) = f \circ \varphi(t) = f(a + th, b + tk)$ とおく．合成関数の微分により次を得る．
   $$F'(t) = f_x x' + f_y y' = hf_x + kf_y$$
   - この式において右辺は正確には
   $$\left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f\right)(a + th, b + tk) = \left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f\right) \circ \varphi(t) = \left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f\right)(a + th, b + tk)$$
   である．左辺が t の関数なので右辺も t の関数とみなければならずそれは φ と合成写像をとることに他ならない．
   - この結果は，2 変数関数を $\varphi(t)$ と合成してから t で微分することと，偏微分作用素 $h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$ を f に作用させてから $\varphi(t)$ と合成することが同じであることを述べている．これからさらに t で微分すれば
   $$F''(t) = \left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\right)(a + th, b + tk)$$
   を得る．以下同様に
   $$F^{(m)}(t) = \left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f\right)(a + th, b + tk)$$
   - 偏微分作用素を繰り返し適用することは，2 項定理と同様な方法で次のように展開できることが分かる．
   $$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f = \sum_{l=0}^{m} {}_mC_l \frac{\partial^m f}{\partial^l x \partial^{m-l} y} h^l k^{m-l}$$
   これは f の m 次偏導関数のスカラー倍の和である．
   - f が C^{n+1} 級であれば F も C^{n+1} 級である．よって F にテイラーの定理（定理 2.8, ただし $a = 0, b = 1$ とする）を適用できる．
   $$F(1) = \sum_{m=0}^{n} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + R_{n+1}$$
   - $F^{(m)}$ についての表示により
   $$f(a + h, b + k) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} \frac{{}_mC_l}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial^l x \partial^{m-l} y}(a, b) h^l k^{m-l} + R_{n+1} \qquad \frac{{}_mC_l}{m!} = \frac{1}{l!(m-l)!}$$
   これが 2 変数関数のテイラーの定理（p.96 定理 5.11）に他ならない．

2. テイラーの定理と 1 次近似式，接平面の方程式
テイラーの定理は $f(a+h, b+k)$ を h, k の n 次多項式と誤差 R_{n+1} の和として記述する．ただし，この講義ではもっぱら近似多項式のみ考え，誤差の詳細な考察は行わない．例えば $n=1$ の場合は
$$f(a+h, b+k) \fallingdotseq f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k$$
これが 1 次近似多項式である．さらに $a+h=x,\ b+k=y$ とおきなおせば
$$f(x,y) \fallingdotseq f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$
であり，右辺が接平面の方程式 $z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$ を与える．

3. 極値問題
$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるとき，接平面は水平なので
$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$
でなくてはならない．すなわち極値の候補点は連立方程式 $f_x = f_y = 0$ の解として与えられる．これにより極値問題を解くにはまず連立方程式 $f_x = f_y = 0$ を解く．
$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ のとき (a,b) で実際に極値をとるかどうかは 2 次近似式を利用して判断する．1 次の項の係数は 0 なので
$$f(a+h, b+k) \fallingdotseq f(a,b) + f_{xx}(a,b)\frac{h^2}{2} + f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)\frac{k^2}{2}$$
となるが，この 2 次の項の正負によって $f(a+h,b+k)$ と $f(a,b)$ の大小関係が分かる．
2 次多項式の正負は平方完成を利用して調べられる．
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + \frac{AC-B^2}{A}y^2$$
$AC-B^2 > 0$ で $A > 0$ ならこの式は $(0,0)$ 以外で常に正，$AC-B^2 > 0$ で $A < 0$ ならこの式は $(0,0)$ 以外で常に負，$AC-B^2 < 0$ の場合は正負いずれの値もとる．以上の考察から定理 5.13（p.99）が得られる．

4. 極値問題の計算例（例題 5.8）
テキストに詳しく書いてあるので読んでほしい．なお，極値の候補が多くなる時は次のような表で整理すると分かりやすい．

候補点	$A = f_{xx} = 6x$	$B = f_{xy} = -3$	$C = f_{yy} = 6y$	$AC-B^2$	判定
$(0,0)$	0	-3	0	負	極値をとらない
$(1,1)$	6	-3	6	正	極小

5. $AC-B^2 = 0$ の場合 (難しい)
平方完成すると $Ax^2+2Bxy+Cy^2 = A(x+(B/A)y)^2$ なので，$A > 0$ なら常に 0 以上だが直線 $Ax+By=0$ 上で 0 になっている．$(0,0)$ 以外にも 2 次近似式の 2 次の項が 0 になる場合があるので，大小は誤差の値を考えなくては判断できない．例として $f(x,y) = x^2+y^4$ と $g(x,y) = x^2-y^4$ を紹介した．
いずれも偏微分係数が 2 つとも 0 になる点は $(0,0)$ のみである．さらに $(0,0)$ での 2 次近似式は x^2 である．これは 0 以上であるが y 軸上で 0 になっており，2 次近似式から極値の判定はできない．
$f(x,y) = x^2+y^4$ の場合は誤差 y^4 は常に正であり，$f(x,y) \geqq x^2 \geqq f(0,0) = 0$ が成り立つ．$(0,0)$ で極小である．$g(x,y) = x^2-y^4$ の場合は誤差 $-y^4$ は負なので，y 軸上で負になっている．x 軸上では正なので $f(0,0)=0$ は極値ではない．

本日のレポート課題とヒント

演習問題 5.4.1 をやること．(1) は講義で扱ったので (2)(3)(4) のみで良い．なお $AC - B^2 = 0$ になる場合が含まれている問題がある．これについてこの方法では判定できないという解答でも良い．もちろん誤差の正負を考えて考察することも可能である．