微分積分 II 講義メモ (11 月 5 日)

前回のレポート課題について

極値問題に取り組んでもらった．なお，前回の講義メモのレポート問題に関するコメントで，$AC - B^2 = 0$ の場合があると記述したが私の勘違いだった．混乱した人がいたらお詫びします．なお，レポート課題の解答については，本日の講義の要点に含めて開設します．

本日の講義の要点

1. 極値問題の解き方 (その 1)

   極値問題を解くための最初の作業は $f_x = f_y = 0$ を満たす点を求めることだ．これは連立方程式を解くことに他ならないが，解くための一般論のようなものはなく，きちんとした論理で考察しないとすべての解を決定することができない．前回のレポート課題を使って詳細に解説しよう．

   - $f(x, y) = xy(2 - x - y) = 2xy - x^2y - xy^2$ について

     $f_x = 2y - 2xy - y^2 = y(2 - 2x - y) = 0$ と $f_y = 2x - x^2 - 2xy = x(2 - x - 2y) = 0$ の連立方程式を解く．

     $f_x = 0$ より $y = 0$ または $y = 2 - 2x$ が成り立つ．$y = 0$ の場合は $f_y = 0$ は $x(2 - x) = 0$ となる．よって $x = 0$ または $x = 2$ である．よって解として $(0, 0)$ と $(2, 0)$ を得る．

     $y = 2 - 2x$ の場合は $f_y = 0$ は $x(3x - 2) = 0$ となる．よって $x = 0$ または $x = 2/3$ である．$y = 2 - 2x$ なので $x = 0$ のときは $y = 2$，$x = 2/3$ のときは $y = 2/3$ である．よって解として $(0, 2)$ と $(2/3, 2/3)$ を得る．

     以上合わせて解は $(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2/3, 2/3)$ の 4 つである．

   - $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 + 2y^2$ もついて

     $f_x = 4x^3 + 4xy^2 - 4x = 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0$ と $f_y = 4x^2y + 4y^3 + 4y = 4y(x^2 + y^2 + 1) = 0$ の連立方程式を解く．

     $f_y = 0$ より $y = 0$ である．これを $f_x = 0$ に代入して $4x(x^2 - 1) = 0$ を得る．解は $(0, 0)$ と $(\pm 1, 0)$ の 3 点である．

     【コメント】 $x^2 + y^2 + 1 > 0$ なので $f_y = 0$ は $y = 0$ に他ならない．こちらから先に考えると場合分けの必要がない．

   - $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$ について

     $f_x = (2ax - 2x(ax^2 + by^2))e^{-x^2-y^2} = 2x(a - ax^2 - by^2)e^{-x^2-y^2} = 0$ は $x(a - ax^2 - by^2) = 0$ と同値である．また $f_y = (2by - 2y(ax^2 + by^2))e^{-x^2-y^2} = 2y(b - ax^2 - by^2)e^{-x^2-y^2} = 0$ は $y(b - ax^2 - by^2) = 0$ と同値である．

     $x(a - ax^2 - by^2) = 0$ より $x = 0$ または $ax^2 = a - by^2$ である．$x = 0$ のときは第 2 式より $by(1 - y^2) = 0$ なので $y = 0$ または $y = \pm 1$ である．よって解 $(0, 0)$ と $(0, \pm 1)$ を得る．$ax^2 = a - by^2$ のときは第 2 式より $(b - a)y = 0$ である．$a < b$ より $y = 0$ を得る．$ax^2 = a$ なので $0 < a$ より $x = \pm 1$ である．結局解として $(\pm 1, 0)$ を得る．

     以上まとめて解は $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ の 5 点である．

     【コメント】$e^{-x^2-y^2}$ を消したが，形式的には両辺を $e^{-x^2-y^2}$ で割っている．ただし文字式で割るときにはその文字式が 0 でないことをチェックしなくてはならない．0 になる場合があれば，その場合は別途考える必要がある．解をすべて求められない人のミスの原因は，0 になり得る文字式で割ってしまったというものだ．

   - $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 4) = x^3y + xy^3 - 4xy$ について

$f_x = 3x^2y + y^3 - 4y = y(3x^2 + y^2 - 4) = 0$ と $f_y = x^3 + 3xy^2 - 4x = x(x^2 + 3y^2 - 4) - 0$ の連立方程式を解く．

$f_x = 0$ より $y = 0$ または $y^2 = 4 - 3x^2$ である．$y = 0$ の場合は $f_y = x(x^2 - 4) = 0$ となるので $x = 0$ または $x = \pm 2$ である．よって解として $(0, 0)$ と $(\pm 2, 0)$ を得る．

$y^2 = 4 - 3x^2$ の場合は $f_x = x(8 - 8x^2) = 8x(1 - x^2) = 0$ となる．よって $x = 0$ または $x = \pm 1$ である．$x = 0$ の場合は $y^2 = 4$ なので $y = \pm 2$ である．ゆえに解として $(0, \pm 2)$ を得る．$x = \pm 1$ のときは $y^2 = 1$ より $y = \pm 1$ となる．2 つの複合は無関係に取れるので，解として $(\pm 1, \pm 1)$ と $(\pm 1, \mp 1)$ を得る．

結局解は $(0, 0), (0, \pm 2), (\pm 2, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ の 9 個ある．

いずれも一方の式から場合分けを行って議論している．この議論ですべての解が求められていることをきちんと理解してほしい．

2. 極値問題の解き方 (その 2)

   定理 5.13 を使えば，2 次の偏導関数の値から極値の判定を行うことができる．判定の理論的根拠はテイラーの定理による 2 次近似式と，2 次式の正負の考察である．これについては前回扱ったのでここでは繰り返さない．簡単なことなので例を参考に自分でやってほしい．こういう問題は自分で複数の問題に取り組まないと正確に覚えることができない．

3. 極値問題の解き方 (おまけ)

   2 回の偏微分を使わなくても関数が簡単な場合には極値の判定を行える場合がある．講義では $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 4)$ によってその様子を解説した．分かれば面白い事項だが，分からないという人もいるだろう．分からないという人は気にしなくても良い．

   - $f(x, y) = 0$ は x 軸，y 軸および円周 $x^2 + y^2 = 4$ である．これによって座標平面は 8 つの領域に分かれ，各領域ごとに $f(x, y)$ の正負が決まっている．
   - 極値の候補点 $(0, 0), (\pm 2, 0), (0, \pm 2)$ はそれぞれ 4 つの領域が出会う頂点になっている．$f(x, y)$ は隣り合う領域で符号が変わるのでこれらの点の周りでは正になる点も負になる点もある．よってこれら 5 つの点では極値をとらない．
   - $(1, -1)$ は円の第 2 象限の部分の内部にある．その領域で関数は正の値をとる．周囲では 0 なので，この関数は内部で最大値をとる．そこでは当然極大でなくてはならないが極大値となる候補は $(1, -1)$ 以外に存在しない．よって $(1, -1)$ で極大となる．残りの 4 つの点についても同様に考察できる．

   講義ではさらに最大最小問題に触れたが，これは条件付き極値問題を扱ってから解説すべき問題だ．この講義メモでは省略する．なお例題 5.9 を解説したがテキストに詳細な解説があるのでこれも省略する．

次回は陰関数のグラフについて考察する．あと 2 回で微分を終えるのでその後 1 週間空けてから微分の範囲での試験を行う．今のところ 12 月 3 日を予定している．

本日のレポート課題とヒント

- 問 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ の極値を求めよ．
- テキスト p.102 問 5.4.3 を解け．

最初の問題は極値問題の解き方に従って考えてほしい．なお，1 点だけ $AC - B^2 = 0$ の場合が出てくる．この

極値が分かったら素晴らしい．テキストの問題は極値問題の応用問題な．(3) の解が正三角形だということはすぐにわかると思うが，この講義で学習したことを使っていかにその結果を導くかが課題だ．問題が段階を追って出されているので取り組みやすいだろう．