微分積分 II 講義メモ (11 月 12 日)

前回のレポート課題について

問　$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ の極値問題を解け．

【解答例】$f_x = f_y = 0$ は

$$4x^3 - 4x + 4y = 4(x^3 - x + y) = 0 \qquad 4y^3 + 4x - 4y = 4(y^3 + x - y) = 0$$

となる．第 1 式から $y = x - x^3$ となるので，これを第 2 式に代入し

$$(x - x^3)^3 + x - (x - x^3) = x^3 - 3x^5 + 3x^7 - x^9 + x^3 = x^3(2 - x^2)(x^4 - x^2 + 1) = 0$$

を得る．この解は $x = 0, \pm\sqrt{2}$ であり，それぞれに応じて $y = 0, \mp\sqrt{2}$ となる．よって極値の候補は $(0,0), (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ の 3 点である．

それぞれについて 2 次偏導関数 $f_{xx} = 12x^2 - 4,\ f_{xy} = 4,\ f_{yy} = 12y^4 - 4$ の値を調べれば

候補点	$A = f_{xx}$	$B = f_{xy}$	$C = f_{yy}$	$AC - B^2$	判定
$(0,0)$	-4	4	-4	0	判定できない
$(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$	20	4	20	正	極小

$(0,0)$ で極値をとるか否かを判定するためには $f(0,0) = 0$ より $(0,0)$ の周りでの $f(x,y)$ の正負を調べればよい．常に正なら極小，常に負なら極大，正負いずれの値もとるのであれば極値をとらない．この関数では $f(x,y) = (x^4 + y^4) - 2(x - y)^2$ なので直線 $x = y$ の上では常に正である．しかし x 軸上では $f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$ なので $0 < |x| < \sqrt{2}$ のとき，この関数の値は負である．よって正負いずれの値もとるので $(0,0)$ では極値をとらない．

【コメント】

- $f_x + f_y = 4(x^3 + y^3) = 0$ より $y = -x$ を得る．これを $f_x = 0$ に代入すれば $x^3 - 2x = 0$ となって簡単に解を求められる．$f_x = f_y = 0$ は $f_x + f_y = f_x = 0$ と同値なので，これですべての解が求められる．なお $f_x = f_y = 0$ と $f_x + f_y = 0$ は同値ではない．$f_x = 0$ と連立させなくてはならない．
- $2x^3 - 3x^5 + 3x^7 - x^9 = 0$ から $2 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 = 0$ としてはならない．形式的には x^3 で両辺を割っているがこの議論は $x \neq 0$ を仮定している．$x = 0$ のときは別途考えなくてはならない．
- $(0,0)$ での極値の判定は難しい．ただ解答を見れば納得できるだろう．自分で答えられることと，解答を見て理解できることは質的に異なるが，読んでも理解できないという状況よりはるかに好ましい．

問 5.4.3 を解け．

【解答例】(1) 三つの辺の長さは $x, y, 2a - x - y$ なので，辺の長さが正であることから $x > 0,\ y > 0,\ 2a - x - y > 0$，三角不等式から $x + y > 2a - x - y,\ x + 2a - x - y > y,\ y + 2a - x - y > x$ である．これを作図してみれば D は $x < a,\ y < a,\ a < x + y$ の定める直角二等辺三角形の内部である．なおテキストの解答は三角不等式を考慮していないので誤りである．

(2) 三角形の面積はヘロンの公式により $\sqrt{a(a - x)(a - y)(x + y - a)}$ である．

(3) 根号の中身を a で割ったものを $f(x,y) = (a - x)(a - y)(x + y - a)$ とおく．D の内部で $f(x,y) > 0$ であり D の境界で $f(x,y) = 0$ である．ゆえに最大は D の内部でとり，その点で $f_x = f_y = 0$ になる．

$$f_x = -(a - y)(x + y - a) + (a - x)(a - y) = (a - y)(2a - 2x - y) = 0$$
$$f_y = -(a - x)(x + y - a) + (a - x)(a - y) = (a - x)(2a - x - 2y) = 0$$

について D の内部では $a-y>0$ かつ $a-x>0$ なので $2a-2x-y=2a-x-2y=0$ である．この解は $x=y=2a/3$ であり，もう一つの辺の長さも $2a-x-y=2a/3$ なので 3 辺の長さが等しく正三角形である．D の内部にほかに $f_x=f_y=0$ を満たす点はないので $(2a/3,2a/3)$ で最大である．

【コメント】

- この解答例の D であれば $f(x,y)$ の値は正になる．テキストの D では必ずしも正にならないので根号の中に入れられない．
- 極値の判定を行う方法でも良いがこの解答例も味わってほしい．

本日の講義の要点

1. 陰関数定理

   $F(x,y)=c$ という条件は x を決めると y に制約がつく．$F(a,b)=c$ のとき (a,b) の周りで $F(x,y)=c$ を関数 $y=f(x)$ の形に表すための条件を与えるのが陰関数定理である．$f(x)$ とは $f(a)=b$ と $F(x,f(x))=c$ を満たす関数である．陰関数定理はテキスト p.103 定理 5.14 を見てほしい．

   陰関数とは関数関係が $F(x,y)=c$ という式の中に隠れているという意味であり，それを通常の関数と思えるための条件が陰関数定理である．例えば $x^2+y^2=1$ は $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ の周りでは $y=\sqrt{1-x^2}$ と記述できる．$(0,-1)$ の周りでは $y=-\sqrt{1-x^2}$ と表せる．ただし $(1,0)$ の周りでは $y=f(x)$ の形に表すことはできない．

2. 陰関数のグラフ（等高線）

   $F(x,y)$ が C^1 級であるとき，$z=F(x,y)$ のグラフは滑らかな曲面である．その高さ c の等高線はグラフと水平面 $z=c$ の交わりであるから $F(x,y)=c$ である．この等高線を陰関数のグラフとよぶことにする．(a,b) を $F(a,b)=c$ を満たす点（高さ c の等高線上の点）としよう．(a,b,c) での $z=F(x,y)$ の接平面が水平でないとき，曲面と (a,b,c) での接平面を水平面 $z=c$ で切れば，切り口は陰関数のグラフ $F(x,y)=c$ とその接線が出てくる．これは素朴に考えれば納得できるだろう．この事実を次の定理としてまとめた．

   定理 $F(x,y)$ は C^1 級で $F(a,b)=c$ が成り立つとする．$(F_x(a,b),F_y(a,b))\neq(0,0)$ のとき，$F(x,y)=c$ のグラフは (a,b) の周りで滑らかな曲線でありその接線は次で与えられる．

   $$F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)=0$$

   接平面の方程式 $z=c+F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)$ と水平面の方程式 $z=c$ を組み合わせて得られる式になっていることに注意してほしい．

   ここで $F_y(a,b)\neq 0$ であれば，接線は垂直方向ではないので傾いている．$F(x,y)=c$ のグラフも同様で，このグラフから $y=f(x)$ の形の関数を作ることができる．これが陰関数定理である．

3. 陰関数の導関数

   $F(x,y)=c$ を (a,b) の周りで $y=f(x)$ の形に表せたとき $F(x,f(x))=c$ が成り立つ．この両辺を微分すれば

   $$F_x(x,f(x))+F_y(x,f(x))f'(x)=0$$

   になる．よって

   $$f'(x)=-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$$

なお計算には合成関数の微分を使っているが，x の 1 変数関数 $f(x)$ と x, y の 2 変数関数 $F(x, y)$ が混在するので x が二通りの意味で使われている．$z = F(x, y)$ と $x = t,\ y = f(t)$ を合成して $z = F(t, f(t))$ とするほうが分かりやすい．

4. 陰関数の極値問題 $F(x, y) = c$ の極値問題の解き方をまとめておく．
   - 極値をとる候補点を求める．
     $f'(x) = -F_x/F_y$ より $F_x(x, y) = 0$ である．これと陰関数のグラフ上にあるための条件 $F(x, y) = 0$ を連立させればよい．なお，候補点において $F_y \neq 0$ であることをチェックせよ．$F_y = 0$ の場合にはこの方法は使えない．
   - 極値の判定
     商の微分法則と陰関数の導関数の計算から

$$f''(x) = -\frac{(F_{xx} + F_{xy}f')F_y - F_x(F_{yx} + F_{yy}f')}{(F_y)^2}$$

     極値の候補点では $F_x = 0,\ f' = 0$ なので $f'' = -F_{xx}/F_y$ である．この値が正であれば極小，負であれば極大である．

   講義では例 5.11 を解説した．テキストに詳しく書いてあるのでここでは省略する．

テキストには 3 変数関数から作られる陰関数 $F(x, y, z) = c$ についても記述しているが，講義では $F(x, y) = c$ の場合に限定する．これに関する記述は無視して構わない．次回は条件付き極値問題と最大最小問題を扱う．次回で微分を終える予定である．

本日のレポート課題

p.107 の問 5.5.3 を課題にする．例と上のまとめを参考に取り組んでほしい．