微分積分 II 講義メモ (11 月 19 日)

前回のレポート課題について

問 5.5.3 は陰関数 $F(x, y) = c$ として定義される関数の極値問題だ．プロセスは他の極値問題と同様に二段階であり

- 極値の候補点を求める．すなわち連立方程式 $F(x, y) = c,\ F_x(x, y) = 0$ を解く．
- 極値の候補点で $F_y \neq 0$ であることをチェックする．これによって極値の候補点の近くで $y = f(x)$ の形の関数として表せることが分かる．
- 極値の判定を行う．すなわち極値の候補点において $f'' = -F_{xx}/F_y$ の符号を調べる．

(1) $F(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 80$ について

- $F_x = 10x - 6y = 0$ より $x = (3/5)y$ である．これを $F = 0$ に代入して $y^2 = 25$ を得る．ゆえに $y = \pm 5$ でありそのとき $x = \pm 3$ である．極値の候補点は $(\pm 3, \pm 5)$ である．
- $F_y = -6x + 10y$ より $F_y(\pm 3, \pm 5) = \pm 32 \neq 0$ よりこの候補点の周りで $y = f(x)$ の形に表示できる．候補点では $f' = 0$ なので f'' の符号を調べることにより極値の判定を行う．
- $F_{xx} = 10$ より $f''(\pm 3) = -F_{xx}(\pm 3, \pm 5)/F_y(\pm 3, \pm 5) = -10/(\pm 32)$ なので $(3, 5)$ で $f'' < 0$ であり極大である．また $(-3, -5)$ で $f'' > 0$ であり極大である．
- $x = 3$ で極大値 5 を，$x = -3$ で極小値 -5 をとる．

(2) $F(x, y) = xy^2 - x^2y = 2$ について

- $F_x = y^2 - 2xy = y(y - 2x) = 0$ より $y = 0$ または $y = 2x$ である．$y = 0$ のときは $F(x, 0) = 0 \neq 2$ なのでこの場合の解は存在しない．$y = 2x$ のときは $F(x, 2x) = 2x^3 = 2$ なので $x = 1$ である．極値の候補点は $(1, 2)$ である．
- $F_y(x, y) = 2xy - x^2$ より $F_y(1, 2) = 3$ であり，極値の判定は f'' の符号を調べることにより行える．
- $F_{xx} = -2y$ より $f'' = 4/3 > 0$ なので極小である．
- $x = 1$ で極小値 2 をとる．

(3) $F(x, y) = x^2y + xy^2 + 2a^3 = 0$ について

- $F_x = 2xy + y^2 = y(2x + y) = 0$ より $y = 0$ または $y = -2x$ である．$y = 0$ のときは $F(x, 0) = 2a^3$ なので $a \neq 0$ より $F = 0$ は成立しない．よってこの場合の解は存在しない．$y = -2x$ のときは $F(x, -2x) = 2x^3 + 2a^3 = 0$ より $x = -a$ である．極値の候補点は $(-a, 2a)$ のみである．
- $F_y = x^2 + 2xy$ より $F_y(-a, 2a) = -3a^2 \neq 0$ なので $(-a, 2a)$ の周りで $y = f(x)$ の形に表せる．
- $F_{xx} = 2y$ より $f''(-a) = -(4a)/(-3a^2) = 4/(3a)$ なので $a > 0$ のときは極小，$a < 0$ のときは極大である．
- $x = -a$ において極大値（極小値）$2a$ をとる．

【コメント】

- $F_y = 0$ の場合は $y = f(x)$ の形に記述できる保障はない．極値を考えること自体意味を持たなくなる可能性がある．
- $F_y \neq 0$ の場合は $y = f(x)$ という微分可能な関数で記述できる．これが陰関数定理だ．なお f' を F の

偏導関数で表す式は $F(x, f(x)) = c$ の両辺を微分すればよい．

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0 \qquad f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

2 次導関数もこの式をさらに微分すればよい．

$$F_{xx}(x, f(x)) + F_{xy}(x, f(x))f'(x) + (F_{yx}(x, f(x)) + F_{yy}(x, f(x))f'(x))f'(x) + F_y(x, f(x))f''(x) = 0$$

ここで $f'(a) = 0$ ならば次式が成り立つ．

$$f''(a) = -\frac{F_{xx}(a, f(a))}{F_y(a, f(a))}$$

ただしこの式を

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}(x, y)}{F_y(x, y)}$$

と書いたら間違いだ．一般の x では $f'(x) = 0$ は成り立たないからだ．

本日の講義の要点

1. 条件付き極値問題

C^1 級関数 $F(x, y)$, $G(x, y)$ について $G(x, y) = 0$ という条件のもとに $z = F(x, y)$ の極値を求めたい．これは $z = F(x, y)$ のグラフで定まる曲面（地形）を $G(x, y) = 0$ というルートで進んだ時の，登りから下りへ（下りから登りへ）変わる点を求めることに相当する．曲面を等高線で記述すれば，等高線 $F(x, y) = c$ とルート $G(x, y) = 0$ が接する点が極値の候補になる．逆に言えば等高線とルートが角度をもって交わるような点では極値は取らない．この事実を次のようにまとめた．

条件付き極値問題の候補点は次の連立方程式の解である．

$$G(x, y) = 0 \qquad \begin{vmatrix} F_x & G_x \\ F_y & G_y \end{vmatrix} = F_x G_y - F_y G_x = 0$$

最初の条件 $G(x, y) = 0$ は極値を考える条件なのだから当然である．次の条件については，この行列式が 0 でない場合は等高線 $F(x, y) = c$ とルート $G(x, y) = 0$ はともに滑らかな曲線であり，その接線は角度をもって交わる．このような場合に極値をとらないことは最初の素朴な考察から納得できるだろう．

テキストでは $G_x = G_y = 0$ でないとして，ベクトル (F_x, F_y) が (G_x, G_y) の λ 倍であるという条件を立てている．$(G_x, G_y) = (0, 0)$ も含めてこれは 2 つのベクトルが一次従属だということに他ならないので，行列式で必要十分条件が与えられる．なお 3 変数以上の場合は，行列式は利用できないので一次従属性で記述する必要がある．

講義では例題 5.12 を解説した．$G(x, y) = ax + by + c = 0$ の条件下での $F(x, y) = x^2 + y^2$ の極値問題なので

$$G(x, y) = ax + by + c = 0 \qquad F_x G_y - F_y G_x = 2bx - 2ay = 0$$

なのでこれは連立 1 次方程式にほかならず

$$x = \frac{-ac}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{-bc}{a^2 + b^2}$$

が極値の候補点になる．問題の図形的意味を考えればこの点で距離が最小になるのは明らかであり，原点 $(0, 0)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. 最大最小問題

有界で閉じた領域 D で連続な関数は最大値および最小値をとることが知られている．$F(x,y)$ が D で C^1 級のとき，最大，最小の候補点は次のいずれかである．

- D の内部における極値の候補点，すなわち $F_x = F_y = 0$ を満たす点
- D の境界にあるという条件のもとに，$F(x,y)$ の極値の候補点，D の境界が C^1 級関数 $G(x,y)$ により $G(x,y) = 0$ で定義されているときには $G = F_xG_y - F_yG_x = 0$ を満たす点
- D の境界で滑らかになっていない点（D が三角形領域のときには三角形の頂点）

これらの候補点をすべて求めれば，候補点でとる値を比較することにより最大最小を決定できる．2 回微分を利用した極値の判定は不要である，

例 $D : (x^2/a^2) + (y^2/b^2) \leqq 1,\ 0 < b < a$ において $F(x,y) = xy$ の最大最小を求める．

- $F_x = y,\ F_y = x$ より $F_x = F_y = 0$ を満たす点は $(0,0)$ のみである．
- 境界は $G(x,y) = (x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ で定義されるので，条件付き極値問題の候補点は

$$G = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad F_xG_y - F_yG_x = \frac{2y^2}{b^2} - \frac{2x^2}{a^2} = 0$$

より $x^2/a^2 = y^2/b^2 = 1/2$ である．よって $(\pm a/\sqrt{2}, \pm b/\sqrt{2}),\ (\pm a/\sqrt{2}, \mp b/\sqrt{2})$ の 4 点である．

$F(0,0) = 0,\ F(\pm a/\sqrt{2}, \pm b.\sqrt{2}) = ab/2,\ F(\pm a/\sqrt{2}, \mp b/\sqrt{2}) = -ab/2$ なので最大値は $ab/2$，最小値は $-ab/2$ である．

講義では同じ領域で $F(x,y) = x^2 + y^2$ の極値問題に取り組んでもらった．解答の解説まで行ったがここでは省略する．

次回は重積分の話に移る．1 週間空けて 12 月 3 日に微分の範囲での試験を行う．これはこの講義の第 1 回試験であり，学期末の第 2 回試験と同等のウェートを持つ．第 2 回試験のときと同等に試験準備を行っておくように．

本日のレポート課題

演習問題 5.6.3 および次の最大最小問題を課題とする．この講義メモの解説とテキストを読んで取り組むこと．

問題 $D : x^2 + 2y^2 \leqq 1$ において $F(x,y) = x^3 + y^3$ の最大値および最小値を求めよ．