微分積分 II 講義メモ (11 月 26 日)

前回のレポート課題について

レポート課題について授業では演習問題 5.6.2 と述べたのに前回の講義メモでは 5.6.3 と書いてしまった．申し訳ない．授業では 2 変数に限定して解説しているので 5.6.3 は気にしなくてよい．ただし，せっかくの機会なので両方とも解説しておこう．

- 5.6.2 は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上で $(0, 2)$ に最も近い点を求めよという問題だ．これは $G(x, y) = x^2 - y^2 = 1$ という条件のもとに $F(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$ の極致を求めることに他ならない．ゆえに連立方程式

$$G = x^2 - y^2 = 1 \qquad F_xG_y - F_yG_x = -4xy - 4x(y - 2) = -4x(2y - 2) = 0$$

  を解けばよいが，第 2 式より $x = 0$ または $y = 1$ である．$x = 0$ の場合は第 1 式より $y^2 = -1$ となるので解は存在しない．$y = 1$ の場合は第 1 式より $x^2 = 2$ なので $x = \pm\sqrt{2}$ である．条件付き極値の候補は $(\pm\sqrt{2}, 1)$ なので最小値はこの 2 点の何れかでとる．$F(\pm\sqrt{2}, 1) = 3$ よりこの 2 点の $(0, 2)$ からの距離は $\sqrt{3}$ で等しくこの 2 点が最も近い点であるといえる．
  【コメント】グラフを考えれば最も近い点の存在は直ぐにわかる．候補点が 2 つ出てきたので，このうち近いほうを選べばよい．この問題では y 軸に関する対称性から 2 点いずれも最近点になるが，$(0, 2)$ を y 軸上にない点に変えれば距離は変わるので，最近点はその近いほうを選ぶ必要がある．
- 5.6.3 は 3 変数なので一次独立性の判定に行列式は使えない．条件は $G(x, y, z) = x + y + z = \pi$ であり，この条件下で $F(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ の極値を求めることになる．なお，三角形の内角 x は $0 < x < \pi$（他も同様）でなくてはならない．ラグランジュの未定乗数法により

$$F_x-\lambda G_x = \cos x \sin y \sin z-\lambda = 0, \quad F_y-\lambda G_y = \sin x \cos y \sin x-\lambda = 0, \quad F_z-\lambda G_z = \sin x \sin y \cos z-\lambda = 0$$

  なので λ は消去して

$$\cos x \sin y \sin z = \sin x \cos y \sin z = \sin x \sin y \cos z$$

  が極値の候補点の条件になる．最初の等式と 2 番目の等式は加法定理を用いて

$$\sin z \sin(y - x) = 0, \qquad \sin x \sin(z - y) = 0$$

  条件，$0 < x < \pi$, $0 < z < \pi$ より $\sin(y - x) = \sin(z - y) = 0$ を得る．$-\pi < -x < y - x < y < \pi$ より $y - x = z - y = 0$ を得る．よって極値の候補となりえる点は $x = y = z = \pi/3$ のみである．$F(x, y, z) > 0$ に注意して $F(x, y, z)$ は $x = y = z = \pi/3$ のとき最大値 $3\sqrt{3}/8$ をとる．
- 独自に出題した問題「$D : x^2 + 2y^2 \leqq 1$ において $F(x, y) = x^3 + y^3$ の最大値最小値を求めよ」について
  - D の内部での最大最小の候補点は $F_x = F_y = 0$ より $3x^2 = 3y^2 = 0$ なので $(0, 0)$ のみである．
  - D の境界上での最大最小の候補は $G(x, y) = x^2 + 2y^2 = 1$ という条件下での F の条件付き極値問題の解なので連立方程式

$$G = x^2 + 2y^2 = 1 \qquad F_xG_y - F_yG_x = 3x^2 4y - 3y^2 2x = 6xy(2x - y) = 0$$

    を解く．第 2 式は $x = 0$, $y = 0$, $y = 2x$ の何れかが成り立つことなので，それぞれの場合を第 1 式に代入して

$$(0, \pm 1/\sqrt{2}) \qquad (\pm 1, 0) \qquad (\pm 1/3,\ \pm 2/3)(\text{複号同順})$$

– 以上 7 点が最大最小の候補であるが，それぞれの値は

$$F(0,0)=0 \quad F(0,\pm 1/\sqrt{2})=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad F(\pm 1,0)=\pm 1, \quad F(\pm 1/3,\pm 2/3)=\frac{1}{27}+\frac{8}{27}=\frac{1}{3}$$

であり，最大値は $F(1,0)=1$，最小値は $F(-1,0)=-1$ である．

【コメント】 内部での最大最小の候補は極値の候補点として，境界上での最大最小の候補は条件付き極値の候補点として求めることができる．境界の曲線が滑らかになっていない点があれば，それも候補点に加えればよい．こうしてすべての候補点を求め，候補点での $f(x,y)$ の値を比較することにより最大最小が決定できる．ただし，候補点を一つでも落としてしまったら議論はまったく無効である．落としたところで最大最小になるかもしれないからだ．特に文字式で割ったりすると，その文字式の値が 0 でないことを仮定したことになってしまうので注意が必要だ．上の解答例をきちんと考えてみてほしい．

本日の講義の要点

1. 重積分

   D を有界で閉じた領域とし，$f(x,y)$ を D 上の連続関数とする．重積分とは $z=f(x,y)$ のグラフと xy 平面で挟まれた部分の体積とみなすことにし

   $$\iint_D f(x,y)dxdy$$

   と表す．重積分はリーマン和の極限として定義されるが，講義ではその定義は後回しにして体積として考えることにする．

2. 累次積分

   高校で回転体の体積について断面積（円の面積）を積分することによって計算した．この断面積も積分で求めることにすれば積分を繰り返すことによって体積（重積分）が求められることは容易に想定できるだろう．このことを次のような枠組みで解説した．

   - D を $y=\varphi(x)$ と $y=\psi(x)$ で囲まれた領域とする．

     $$D=\{(x,y)\mid a\leqq x\leqq b,\ \varphi(x)\leqq y\leqq\psi(x)\}$$

   - 求める立体を $x=\alpha$ なる断面できる．断面は yz 平面における $z=f(\alpha,y)$ と y 軸で囲まれた部分なので，断面積 $S(\alpha)$ は

     $$S(\alpha)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(\alpha,y)dy$$

     で求められる．ここで α は任意に取れるので変数とみなし x に戻す．

   - 体積は断面積 $S(x)$ を積分すればよいので

     $$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

     として計算できる．なお積分記号の上下の添え字は積分範囲を表すがどの変数の動く範囲か明確に意識する必要がある．最後の表示は積分記号と dx をセットで書くことにより，x の動く範囲が a から b までであることを分かりやすくしている．

3. 累次積分の計算例

- $D: x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ 上で x^2y を積分する．x を固定した時, y の動く範囲は $0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}$ なので
$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y dy = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 - x^4 dx = \frac{1}{15}$$
この計算ではまず y について積分したが，x から先に積分することもできる．y を固定した時，x の動く範囲は $0 \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2}$ なので
$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2 y dx = \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3}x^3 y\right]_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-y^2)y\sqrt{1-y^2}dy$$
この積分は $y = \sin\theta$ と置換積分すれば計算できる．答えはもちろん 1/15 だが積分の順序によって計算の難易度に大きな差が出ることを感じてほしい．
- $D: 0 \leqq x \leqq y \leqq 1$ 上で xe^y を積分する．y を固定した時 x の動く範囲は $0 \leqq x \leqq y$ であるから
$$\int_0^1 dy \int_0^y xe^y dx = \int_0^1 dy \left[\frac{1}{2}x^2e^y\right]_{x=0}^{y} = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2e^y dy$$
この積分は 2 回部分積分を行うことにより計算できる．
- $D: 0 \leqq y \leqq x^2 \leqq 1,\ x \geqq 0$ において xy を積分する．x を固定した時 y の動く範囲は $0 \leqq y \leqq x^2$ なので
$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy dy = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{12}$$

以上 3 つの例において，まず D を図示することから始めること．これは不等式と領域の話なので高等学校で習っているはずだ．次に x と y のどちらで先に積分するか決めること．順序によって難易度が変わるので，難しい場合は順序を入れ替えてみると良い．積分の順序交換については 12 月 10 日の授業で扱う．累次積分の形に直せれば後の計算は難しくない．まずは演習問題を自力で解いてみるように．

本日のレポート課題

手元にテキストがないのでレポート課題についてはおって Moodle のニュースフォーラムに書くことにします．なおレポートの提出期限は 12 月 8 日 (火) とします．とりあえずは来週の試験に向けた勉強に集中してください．今回の授業の復習とレポート課題への取り組みは試験終了後に行うようにしてください．