微分積分 II 講義メモ (12 月 10 日)

前回のレポート課題について

重積分の基本的な計算問題を出題した．レポートを提出しない学生が多かったが，必ず自分で解いてみるように．解答例とコメントは省略する．

本日の講義の要点

1. 演習問題 6.1.2(2) について（前回の復習）

   D は 4 つの不等式で定義されているが，図示してみれば $y = x$ と $y = x^2$ のグラフで挟まれた領域であることが分かる．この問題の重積分は $z - \sqrt{xy}$ のグラフと xy 平面で挟まれた D の上にある部分の体積である．$0 \leqq y \leqq 1$ を固定して，y 軸に垂直な平面との切り口を考えれば，断面積は

   $$S(y) = \int_{y^2}^{y} \sqrt{xy}dx = \frac{2}{3}\sqrt{y}[x^{3/2}]_{y^2}^{y} = \frac{2}{3}\sqrt{y}(y^{3/2} - y^3) = \frac{2}{3}\left(y^2 - y^{7/2}\right)$$

   である．求める体積は断面積を 0 から 1 まで積分すればいいので

   $$\int_0^1 S(y)dydx = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{2}{9}y^{9/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) = \frac{2}{27}$$

   である．このように重積分は積分の繰り返し（累次積分）で求められる．記号としては

   $$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \sqrt{xy}dx$$

   と表す．$S(x)$ を積分記号の外（dy の右側）に出してしまったように感じるかもしれないが，そういう意味ではない．積分記号 $\int$ と dx はセットなので，近接させて表示したほうが分かりやすいことからこのような表示を行う．慣れてほしい．

   このように重積分は累次積分で計算するがその方法は二通りある．上の解答例では x で先に積分しているが，これを y で先に積分すると

   $$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \sqrt{xy}dy = \int_0^1 dx\left[\sqrt{x}\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_x^{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\int_0^1 x^{5/4} - x^2 dx$$

   となる．この値ももちろん 2/27 である．

2. 積分の順序交換

   累次積分の仕方は二通りあるが，どちらも同じように計算できるわけではない．計算の難易度は変わるし，極端な場合一方の方法では計算できないということもある．p.118 の例題 6.2 はそのような例で

   $$\iint_D \sin(\pi y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^1 \sin(\pi y^2)dy = \int_0^1 dy \int_0^y \sin(\pi y^2)dx$$

   と累次積分に直したとき，y で先に計算するほうは原始関数が求められないので失敗する．x で先に計算するほうは簡単に計算できる（テキスト p.118）．

   さて，一般的な順序交換については定理 6.5 として整理されている．重要なのは積分域から累次積分の形を作ること，累次積分から積分域を求めることの 2 つを自由に行えるようになることだ．その際，積分域の図示が最も重要である．例題等で自分で考え t ほしい．

3. 積分の順序交換の例

$$\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$$

D は直線 $y = x + 2$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた領域である．これを x で先に積分するためには y を固定した時の x の動く範囲を考察する．$0 \leqq y \leqq 1$ のときは $-\sqrt{y} \leqq x \leqq \sqrt{y}$，$1 \leqq y \leqq 4$ のときは $y-2 \leqq x \leqq \sqrt{y}$ なので積分は 2 つの項に分け

$$\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_{1}^{4} dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

とすればよい．定理 6.5 の表示で $p(x)$ が 1 つの式で表せないので 2 つに分けたということだ．

4. リーマン和と積分の定義

重積分は体積を求めることだが断面積を縦に切るか横に切るかで計算内容が全く変わることを経験した．さらに斜めに切ったり丸く切ったり（回転体の体積の求め方でバウムクーヘン法）する方法も考えられる．これは変数変換の立場から理解することができる．変数変換を記述するために，積分の定義を確認する．

講義では簡単な説明にとどめたのでテキストの 112 ページから 113 ページのところを読んでほしい．リーマン和を導入しその極限として重積分を定義している．この定義からの帰結として定理 6.1 と定理 6.2 が得られる．詳しい説明は省略するが，リーマン和の極限が重積分であることを知っておくように．

次回は変数変換を解説する．重積分について最も重要な事項である．

本日のレポート課題

演習問題の 6.1.3 と 6.1.4 を課題にする．6.1.4 についてはどちらを先に積分するかを考えること．うまくいかない場合はじゅじょを入れ替えるように．