微分積分 II 講義メモ (12 月 17 日)

前回のレポート課題について

6.1.3 は積分域を図示してから順序を入れ替えること．式の形だけで交換しないように．なお累次積分の形から積分域を知るには

$$\int_0^1 dx \int_{x^4}^{x^2} f(x,y)dxdy \longleftrightarrow D : 0 \leqq x \leqq 1,\ x^4 \leqq y \leqq x^2$$

という関係で理解してほしい．解答はテキスト p.192 にあるので省略する．

6.1.4(1) は y で先に積分しないと計算できない．$\int e^{x^3}dx$ は積分計算では求められないからだ．(2) は x で先に積分したほうが計算が楽だ．y で先に積分することも可能だが計算は相当大変になる．どちらの問題でもそのまま累次積分にしてもうまくいかないような形で D が与えられている．少し意地が悪いが，その処理を行うことが問題の趣旨だ．

$$\int_0^2 dx \int_0^{x^2} e^{x^3}dy = \int_0^2 x^2 e^{x^3}dx = \left[\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_0^2 = \frac{e^8-1}{3} \quad \text{テキストの解答は誤植}$$

$$\int_0^{\pi/4} dy \int_{\sin y}^{1/\sqrt{2}} xdx = \int_0^{\pi/4} dy \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\sin y}^{1/\sqrt{2}} = \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{4} - \frac{\sin^2 y}{2}\right)dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2y}{4}dy = \frac{1}{8}[\sin 2y]_0^{\pi/4} = \frac{1}{8}$$

【コメント】$\int f(x)dx = F(x)$ のとき

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

が成り立つが，これを $ax+b$ で積分して中身の微分で割ると覚えた人は注意が必要だ．この調子で

$$\int f(x^3)dx = \frac{1}{3x^2}F(x^3)$$

とやったらとんでもない間違いだ．右辺を微分したら積の微分法則で $(1/(3x^2))'F(x^3) + (1/(3x^2))f(x^3)3x^2$ となるが第 1 項は 0 にならないからだ．このミスはケアレスミスではない．重大なミスとして大きく減点するので注意してほしい．

本日の講義の要点

1. 積分の変数変換

   (x,y) が (u,v) の C^1 級関数で表されているとき，x,y による重積分を u,v による重積分に書き直すことができる．それが p.122 の定理 6.7 だ．

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

   講義ではリーマン和の極限としての積分の定義を利用して，なぜこの式が成り立つかを解説した．ここでは実際にこの公式を使う場合の考え方を記述しておく．

   - 積分域の変換

     (x,y) が D の上を動くときの (u,v) の動く範囲を考えそれを E とする．範囲を過不足なくとらないと正しい値は求められない．(u,v) と (x,y) の対応を考えなくてはならないので決してやさしくはない．

- 被積分関数の変換

  これは単に $f(x,y)$ を (u,v) の関数に直すだけだ．$f(x(u,v),y(u,v))$ と合成関数を作ればよい．
- 積分要素の変換

  これは簡単に

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

  とすればよい．公式として覚えてしまえば簡単だ．なお，積分要素とは無限小部分の面積のことである．面積要素ともいう．厳密に定義するのは難しい．

  講義ではリーマン和の考えを使って uv 平面での微小領域 E_j と xy 平面での微小領域 D_j の面積比として解説した．C^1 級を仮定しているので 1 次式で近似できること，1 次式は長方形を平行四辺形に移すこと，平行四辺形の面積が行列式（の絶対値）で与えられることが面積要素の変換の公式が成り立つ理由だ．

2. 変数変換の計算例

   例題 6.4 を解説した．
   - 積分域　$E: 0 \leqq u \leqq 2,\ 0 \leqq v \leqq 4$

     D を定義する x,y の不等式をそのまま u,v の不等式に書き直しただけだ．これが積分域の変換を考える際の基本である．この問題では (u,v) と (x,y) が 1 対 1 に対応しているのでこれで十分だが，一般には難しい．詳しくは次回解説する．
   - 被積分関数 $(x+2y)e^{2x-y} = ue^v$

     x,y の式を u,v の式に直しただけ，簡単だ．
   - 積分要素 $x=(u+2v)/5,\ y=(2u-v)/5$ より $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -1/5$ なので $dxdy = \frac{1}{5}dudv$

   あとの計算はテキストを見ること．

3. 長方形領域における $f(x)g(y)$ の重積分

   $D: a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d$ のとき

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

   が成り立つ．これは結構便利な式なので覚えておくとよい．成り立つ理由を簡単にまとめておく．
   - まず左辺を累次積分で表す．

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x)g(y)dy$$

   - 一回目の積分 $\int_c^d f(x)g(y)dy$ において x は一定として y で積分するので $f(x)$ を積分の外に出せる．

$$\int_c^d f(x)g(y)dy = f(x)\int_c^d g(y)dy$$

   - $\int_c^d g(y)dy$ は定数なのでこれを A とおく．第 1 回目の積分の結果は $Af(x)$ である．
   - 第 2 回目の積分を行えば

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x)g(y)dy = \int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

   p.123 の例題 6.4 の計算でもこの公式を使っていることに注意してほしい．

次回（12 月 22 日第 3 時限の補講）は極座標変換を中心により一般の変数変換を解説する．変数変換の公式における三つの変換をきちんと理解しておいてほしい．