微分積分 II 講義メモ (12 月 22 日)

本日の講義の要点

1. 積分の変数変換（極座標変換）

   変数変換で最も重要なのは極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ であろう．r は原点からの距離として，θ は x 軸の正方向からの偏角として理解できるので，D の図から r, θ の動く範囲を図形的に理解することができる．なお，$r \geqq 0$ は極座標を考える際の大前提である．また θ の動く範囲も必要以上に大きくしないため $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ あるいは $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ などに制限して考える必要がある．積分域の変換にはこの 2 点に注意すること．積分要素の変換は $dxdy = rdrd\theta$ でよい．計算は p.123 の例に記述されている．この式は覚えるなと言っても覚えてしまう式なので，当たり前のこととして使ってよい．

   - 例題 6.5 (1)

     最も基本的な問題である．積分域については D の条件式 $x^2 + y^2 \leqq a^2$ に極座標を入れると $r^2 \leqq a^2$ となるがこれを $-a \leqq r \leqq a$ などとしないように．テキストに記述されているのでここでは省略する．

   - 例題 6.5 (2)

     講義では $D : x^2 + y^2 \leqq ax,\ a > 0$ として考えた．まず，この領域を求めることが第 1 段階だが，高校で扱った円の内部を表す不等式に過ぎない．この程度のことは簡単にできるように．なおテキストでは極座標変換で行っているが講義では

     $$x = \frac{a}{2} + r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

     と D の中心からの極座標を利用した．変数変換は

     積分域　$E : 0 \leqq r \leqq a/2,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

     被積分関数　$x = a/2 + r\cos\theta$

     積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

     極座標の場合と定数しか違わないので積分要素の変換は極座標の場合と同じになる．以上を組み合わせれば

     $$\iint_D xdxdy = \iint_E \left(\frac{a}{2} + r\cos\theta\right) rdrd\theta = \int_0^{a/2} dr \int_0^{2\pi} \frac{a}{2}r + r^2\cos\theta d\theta$$

     だが $\cos\theta$ を $[0, 2\pi]$ で積分したら 0 になるので

     $$\iiint_D xdxdy = \int_0^{a/2} \pi a r dr = \frac{a^3}{8}\pi$$

     となる．テキストでは単純に極座標で計算しているがこのほうが簡単に計算できる．

   - $D : x^2 + y^2 \leqq ax,\ a > 0$ における $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ の重積分

     積分域は前と同じだが被積分関数が違うので前の変数変換は使えない．これは極座標を使う必要がある．

     積分域　D を定める不等式を極座標を使って書き直せば $r^2 \leqq ar\cos\theta$ となる．$r \geqq 0$ と合わせて $0 \leqq r \leqq a\cos\theta$ である．なお，$x \geqq 0$ なので θ の動く範囲は $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ である．これは原点を通る偏角 θ の方向の弦の長さが $a\cos\theta$ であることを考えれば図形的にも納得できるだろう．

     被積分関数　$\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}$

積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

原点中心の円ではないので積分域の考察は難しい．じっくり考えてほしい．さて以上の変換から計算は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy &= \iint_E \sqrt{a^2 - r^2}rdrd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2 - r^2}dr \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^{a\cos\theta} = \frac{a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - |\sin\theta|^3 d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/2} 1 - \sin^3\theta d\theta = \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/2} 1 + \frac{\sin 3\theta}{4} - \frac{3\sin\theta}{4} = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}\right)a^3\end{aligned}$$

- 変数変換の問題ではないが $D : x^2 + y^2 \leqq ax$ で $\sqrt{x}$ を積分する問題も出した．これは y で先に積分する形で累次積分すると簡単に計算できる．重積分の変数変換では，被積分関数と積分域の両方を考えなくてはならないので難しい．一般論はないので試行錯誤は覚悟しないとならない．

2. 広義積分

   重積分においても関数が無限大に発散する点を持つ場合や，積分域が無限に広がっている場合はリーマン和の極限の形で積分を定義することはできない．1 変数の場合と同じように積分域を適当に狭めてやって極限をとるという考えが必要になる．ただし，積分域の列を考えるというのは理解するのが難しい．例題 6.7 のみ解説した．ここでは省略する．

1 月 14 日の講義では重積分の応用を解説する．また 1 月 21 日の講義では 3 変数の場合の微積分の扱いを解説する．第 2 回試験は 2 月 4 日に行う．レポート課題は 6.2.1 と 6.2.2 をやること．6.2.2(3) は $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ と変換するとよい．レポートの締め切りは 1 月 12 日 (火) の 12 時とする．