理系基礎科目「微分積分 II」（工学部機械 2 組）
第 1 回試験（12 月 3 日実施）解答例とコメント

問 1 は各小問に 10 点，問 2 と問 3 に 15 点，問 4 に 10 点の 80 点満点で採点した．受験者は 64 人，最高点は 75 点，最低点は 0 点，平均点は 38.73 点だった．基本的な問題しか出題していないが，基礎レベルの定着ができていないと強く感じた．また計算力も低く，高校まででどんな学習をしていたのか疑問を持たざるを得ないような答案も多かった．

合格点は 25 点とする．第 2 回試験（積分の試験）も不合格の場合は再試験の対象にならないので，日頃の学習をきちんとやっておくように．

1 (1) 次の関数の 2 階までの偏導関数を求めよ．

$$(1) f(x,y) = x^2y - 3xy^3 - 2xy^2 + 2x - y \qquad (2) f(x,y) = \cos(x^2 - y^2)$$

【解答例】 (1) $f_x = 2xy - 3y^3 - 2y^2 + 2$, $f_y = x^2 - 9xy^2 - 4xy - 1$, $f_{xx} = 2y$, $f_{xy} = 2x - 9y^2 - 4y$, $f_{yy} = -18xy - 4x$
(2) $f_x = -2x\sin(x^2 - y^2)$, $f_y = 2y\sin(x^2 - y^2)$, $f_{xx} = -2\sin(x^2 - y^2) - 4x^2\cos(x^2 - y^2)$, $f_{xy} = 4xy\cos(x^2 - y^2)$, $f_{yy} = 2\sin(x^2 - y^2) - 4y^2\cos(x^2 - y^2)$

【コメント】

- f_{xy} の計算をしていない答案がある．2 次の偏導関数は f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} の 3 通りある．なお問題にあるような一つの式で定義されている関数は，何回でも微分できるので $f_{xy} = f_{yx}$ を満たす．一方のみ計算すれば十分だ．
- (2) で $\cos(x^2 - y^2) = \cos x^2 \cos y^2 + \sin x^2 \sin y^2$ としてから微分する人がいるが，明らかに計算量は多くなる．
- $f_{xx} = -4x^2\cos(x^2 - y^2)$ とする答案が目立った．積の微分のミスだが単純なことなので間違えないように．

1 (2) 次の極限の点 $(0,0)$ での連続性を調べよ．

$$(1) f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy + 2y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (2) f(x,y) = \begin{cases} x\log(x^2 + y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

【解答例】 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおけば (1) は $f(x,y) = \cos\theta\sin\theta + 2r\sin^3\theta$ である．θ を一定にしたまま $r \to 0$ とすると極限は $(1/2)\sin 2\theta$ なので，θ の値によって様々な値になる．よって $r \to 0$ のときに一定の値に近づくことはない．収束しないので連続ではない．(2) は $f(x,y) = r\cos\theta\log r^2$ より $|f(x,y)| \leqq 2r|\log r|$ だが $\lim_{r\to+0} r\log r = 0$ なので $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である．$f(0,0) = 0$ と定義されているので $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続である．

【コメント】

- (2) で $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ を示さなければならない．$r \to 0$ だからでは理由にならないし $|r\log r| \leqq 2r$ では間違いだ．なお解答例のように $r\log r \to 0$ は既知の事実として使ってよい．

- 極座標を利用するがその後の極限を $\theta \to 0$ とする人がいるが，形だけ覚えておこうとしたためだろう．極座標の r が原点からの距離を意味することに注意すれば $r \to 0$ とするのが当たり前に思えるはずだが．考えることを放棄して覚えるだけにするのでは数学の勉強にはならない．

1 (3) 関数 $z = x^3 + 2xy + 2y^3$ のグラフ（曲面）の $(x, y) = (2, -1)$ での接平面の方程式を求めよ．また $x^3 + 2xy + 2y^3 = 2$ で定義される曲線の $(2, -1)$ における接線の方程式を求めよ．

【解答例】 $f_x(x, y) = 3x^2 + 2y$ より $f_x(2, -1) = 10$，$f_y(x, y) = 2x + 6y^2$ より $f_y(2, -1) = 10$ である．よって求める接平面の方程式は

$$z = 10(x - 2) + 10(y + 1) + f(2, -1) = 10x + 10y - 8$$

求める接線の方程式は

$$10(x - 2) + 10(y + 1) = 10x + 10y - 10 = 0, \qquad x + y = 1$$

【コメント】

- 平面の方程式，直線の方程式は一次関数だ．1 次関数になっていない答案が目につく．
- 接平面の方程式は基本事項なのに全く定着していなかった．$y = f(x)$ の $(a, f(a))$ における接線の方程式が $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ になることは高校で学習したはずだ．接平面の方程式は

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

だが，形式がよく似ていることに注意して覚えてほしい．$f(a, b)$ を落とす人がいたが，接線の方程式で定数項 $f(a)$ を落としたようなものだ．

1 (4) C^1 級関数 $z = f(x, y)$ について $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と変換する．次の等式を示せ．

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = (f_r)^2 + \frac{1}{r^2}(f_\theta)^2$$

【解答例】合成関数の微分により

$$f_r = f_x x_r + f_y y_r = \cos\theta f_x + \sin\theta f_y \qquad f_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta = -r\sin\theta f_x + r\cos\theta f_y$$

である．よって

$$(f_r)^2 + \frac{1}{r^2}(f_\theta)^2 = (\cos\theta f_x + \sin\theta f_y)^2 + (-\sin\theta f_x + \cos\theta f_y)^2 = (f_x)^2 + (f_y)^2$$

【コメント】

- 合成関数の微分を利用する問題だが，合成関数の微分を全く使えない人が多い．
- 意味不明な記号を使う人が多いが，何かの授業で出てきたものなのだろうか．自分で適当に記号を作っているのだろうか．理解できない．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の関数の極値の候補点を求めるとともに，求めたそれぞれの点について極値の判定を行え．

$$f(x,y) = x^3y + xy^2 - 5xy$$

【解答例】$f_x = 3x^2y+y^2-5y = y(3x^2+y-5) = 0$ と $f_y = x^3+2xy-5x = x(x^2+2y-5) = 0$ の連立方程式を解く．$f_y = 0$ より $x = 0$ または $x^2 = 5-2y$ だが $x = 0$ の場合は $f_x = y(y-5) = 0$ より解として $(x,y) = (0,0)$, $(0,5)$ を得る．$x^2 = 5-2y$ の場合は $f_x = y(10-5y) = 0$ より解として $(x,y) = (\pm\sqrt{5},0)$, $(\pm 1,2)$ を得る．以上の 6 点が極値の候補点である．

$f_{xx} = 6xy$, $f_{xy} = 3x^2+2y-5$, $f_{yy} = 2x$ より判定は

候補点	A	B	C	$AC-B^2$	判定
$(0,0)$	0	-5	0	負	極値をとらない
$(0,5)$	0	5	0	負	極値をとらない
$(\pm\sqrt{5},0))$	0	10	$\pm 2\sqrt{5}$	負	極値をとらない
$(\pm 1,2)$	± 12	2	± 2	正	極小（極大）

よって $(1,2)$ で極小値 -4，$(-1,2)$ で極大値 4 をとる．

【コメント】

- 連立方程式を解くことは比較的よくできていた．最も多いミスは $3x^2y+y^2-5y = 0$ から $3x^2+y-5 = 0$ としてしまうことだ．これは $x = 0$ の場合を無視したことになるので，極値の候補点をすべて求めることができなくなる．
- 2 変数関数の極値問題と陰関数 $f(x,y) = 0$ の極値問題を混同している人が目につく．全く意味の異なる問題なので評価の対象にできない．
- $AC-B^2 < 0$ の場合は極値を取らない（極値ではない）と答えること．何も答えてなければ判定したことにならない．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x,y) = 2x^2+y^2$ の $D: x^2+2y^2 \leqq 4$ における最大最小を求めよ．

【解答例】 $f_x = f_y = 0$ を満たす点は $(0,0)$ のみである．D の境界上の条件付き極値問題では

$$x^2+2y^2 = 4 \qquad 4x(4y) - 2y(2x) = 12xy = 0$$

を連立させれば $x = 0$ のときは $y = \pm\sqrt{2}$，$y = 0$ のときは $x = \pm 2$ である．よって最大最小の候補となる点は $(0,0)$, $(0,\pm\sqrt{2})$, $(\pm 2,0)$ の 5 点である．この 5 点での $f(x,y)$ の値は $0,2,8$ なので $(\pm 2,0)$ で最大値 8，$(0,0)$ で最小値 0 をとる．

【コメント】

- 領域の内部での最大最小は 2 変数関数の極値問題を考えればよい．境界上での最大最小は条件付き極値問題を考える．両方の候補点をすべて求め，その値を比較するという方法を講義で解説した．微分の範囲で扱う最も高級な議論といえる．
- 被積分関数の形を見れば最小値が 0 であることは直ぐにわかる．最大も D の境界の楕円と $z = f(x,y)$

のグラフの等高線の楕円が接する場合だということに気づけば，解答例のような議論がなくても答えは出せる．

- 条件付き極値問題で境界上にあるための条件 $x^2 + 2y^2 = 4$ を連立させない人がいるが，これでは候補点が決まらない．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の関数の $(0,0)$ における偏微分係数を求めよ．また $(0,0)$ で全微分可能であることの定義を述べるとともに，$(0,0)$ での全微分可能性を調べよ．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

【解答例】偏微分係数の定義により

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^3}{h^3} = 2 \qquad f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1$$

である．

$(0,0)$ で全微分可能とは $f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y$ が $f(x,y)$ の 1 次近似式になっていることをいう．すなわち 2 つの関数の差を $\rho(x,y)$ とおいて

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\rho(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

が成り立つことをいう．この問題においては $f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 2x - y$ なので，

$$\frac{f(x,y) - 2x + y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x^3 - y^3 - (2x-y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{-2xy^2 + x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

の極限が 0 に収束するか否か考察すればよい．極座標で計算すれば右辺は

$$-2\cos\theta\sin^2\theta + \cos^2\theta\sin\theta$$

である．ゆえに値は r によらず，$\theta = 0$ の時は 0，$\theta = \pi/4$ の時は $-\sqrt{2}/4$ である．よって $r \to 0$ で一定の値に近づくとは言えない．微分可能ではない．

【コメント】

- 偏微分計算を行う人が多いが，$(0,0)$ での偏微分係数を求めよという問題なので定義に基づいて考えなければならない．解答例を見れば計算内容は全く簡単なことに気づくだろう．この問題が解けないのは，数学の学習が計算方法の習得にあると思っているためだ．授業でも行ったが，この程度の計算はコンピューターがすべて行ってくれる．
- 全微分可能とは 1 次式で近似できることだ．1 次近似式の係数は偏微分係数で与えられるので，それが求められれば 1 次近似式の候補が決まる．あとはそれが実際に 1 次近似式になることを確認するだけだ．