理系基礎科目「微分積分 II」（工学部機械 2 組）
第 2 回試験（2 月 4 日実施）解答例とコメント

問 1 の各小問と問 2 問 3 問 5 に 10 点，問 4 の各小問に 15 点配点し 100 点満点で採点した．最高点は 93 点，最低点は 8 点，平均点は 53.74 点だった．問 3 までは比較的簡単な計算問題だがこれができないというのは計算練習が足りないというほかない．合格点は 35 点とする．

他の分野なら「よく分からないので自分なりに考えてみました」ということも評価されるかもしれないが，数学は言葉の意味を厳格に扱う学問なので「自分なりに考えてみた」というのは殆どが無意味な作業だ．評価しようがない．また公式や技法も使うためには必ず条件があり，それを無視したらとんでもない結論に至ってしまう．仮定や条件についての厳格な取り扱いも数学の特徴だ．そしてこの厳格さこそが様々な分野で数学が利用される根拠になるのだ．

1 年間，微分積分の学修を通じて皆さんとおつきあいしてきたが，このような数学の特徴を認識し数学に取り組んでもらうというのが最大の目的だ．残念ながらまだまだ本来の合格基準に到達した人は少ない．成績で単位が得られたとしてもそれで納得しないようにしてほしい．

1 次の積分の値を求めよ．

$$(1)\quad \iint_D xy\,dxdy,\ D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq a$$

【解答例】そのまま累次積分で計算する．

$$\int_0^a dy \int_0^{a-y} xydx = \frac{1}{2}\int_0^a y(a-y)^2 dy = \frac{1}{2}\left[\frac{a^2y^2}{2} - \frac{2ay^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]_0^a = \frac{1}{24}a^4$$

【コメント】

- 易しい問題だ．最も深刻な間違いは $\int_0^a dy \int_0^a xydx$ としてしまうものだ．一般の領域での累次積分の考え方が全く理解できていない．
- 半分以上の学生が正解であり，10 点満点で平均 7.85 点だった．

$$(2)\quad \iint_D \sqrt{y^2-xy}dxdy,\ D: 0 \leqq x \leqq y \leqq 1$$

【解答例】 これも累次積分で計算する．x で先に積分したほうが簡単である．

$$\int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{y^2-xy}dx = \int_0^1 dy\left[-\frac{2}{3y}(y^2-xy)^{3/2}\right]_0^y = \frac{2}{3}\int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{9}$$

【コメント】

- (1) よりも若干積分が難しいので，x で積分した時の分母の y を落としたもの，分子に持ってきたものなどが目立った．
- 累次積分は 1 変数の積分の繰り返しなので，それぞれの計算で置換積分は利用できる．ただし累次積分に表してからの話だ．累次積分に表す前に置換積分しようとすると積分範囲の理解は困難だ．

- 10 点満点で採点し平均点は 6.54 点だった．

$$(3)\quad \iint_D (x+y)\log(1+x-y)dxdy,\ D: 0 \leqq x+y \leqq 1,\ 0 \leqq x-y \leqq 1$$

【解答例】 $x+y=u,\ x-y=v$ として変数変換する．

積分域　$E: 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v, \leqq 1$
被積分関数　$u \log v$
積分要素　$dxdy = |x_u y_v - x_v y_u| dudv = \frac{1}{2} dudv$

$$\iint_E \frac{1}{2} u \log v dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 du \int_0^1 \log(1+v)dv = \frac{1}{4}\left[(1+v)\log(1+v) - v\right]_0^1 = \frac{2\log 2 - 1}{4}$$

【コメント】

- 積分要素の変換で絶対値を落とした人が少しいたが，ほとんどの人は正しく扱っていた．
- $\log(1+v)$ の積分で間違える人が多い．積分ではなく微分したというのは計算ミスとは言わない．
- 10 点満点で採点し平均点は 6.74 点だった．

$$(4)\quad \iint_D \sin(x^2+y^2)dxdy,\ D: x^2+y^2 \leqq a^2$$

【解答例】 極座標を用いて計算する．$dxdy = rdrd\theta$ に注意せよ．

$$\int_0^a dr \int_0^{2\pi} r\sin r^2 d\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\cos r^2\right]_0^a = \pi(1-\cos a^2)$$

【コメント】

- 典型的な極座標による計算問題，平均点は 8.62 点と比較的よくできていた．
- 積分域の取り方では r の動く範囲を $-a \leqq r \leqq a$ とするものが散見した．極座標では r は原点からの距離であって 0 以上にとるのが大前提だ．距離だという意識がないのだろう．
- $r\sin r^2$ の積分で失敗するものが少なからずいる．$\sin^2 r$ と誤解して $(1-\cos 2r)/2$ にするものもいたが，不注意以上のもの（式の形しかみていない，意味を考えない）を感じる．$1-\cos a^2$ を $\sin a^2$ に書き直すものもいた．公式を意味を考えずに丸暗記してきたつけがたまっているのだろう．こういう勉強をしているうちは数学は絶対にできるようにはならないし面白いとも感じられない．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $D: a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d$ について次の等式が成り立つことを示せ．

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

【解答例】 x で先に積分する形で累次積分を行えば

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x)g(y)dx$$

最初の x による積分では y は定数とみなすので $g(y)$ は積分の外に出してよい．ここで $\int_a^b f(x)dx$ は定数になるのでこれを A と置けば，最初の積分の結果は $Ag(y)$ になる．よって

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \int_c^d Ag(y)dy = A\int_c^d g(y)dy$$

あとは A をもとの積分の形に戻せばよい．

【コメント】

- ポイントは x で先に積分したとき $g(y)$ が積分の外に出ることだ．このことが言葉あるいは式で明示してあれば正解にした．
- 平均点は 7.13 点だった．

3 累次積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$ の順序を交換せよ．

【解答例】直線 $y = x+2$ と放物線 $y = x^2$ に挟まれた部分での積分である．y を固定した時の x の動く範囲を考えれば $0 \leqq y \leqq 1$ のときは $-\sqrt{y} \leqq x \leqq \sqrt{y}$，$1 \leqq y \leqq 4$ のときは $y-2 \leqq x \leqq \sqrt{y}$ である．よって二つの積分に分ける必要がある．

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

【コメント】

- 解答例は式で説明したが図と結果があれば正解にした．
- 2 つの積分に分けていない解答が目につくがそれでは答えられない．図を描きながら何故 2 つに分ける必要があるのか考えてほしい．
- 10 点満点で平均点は 6.77 点だ．

4 座標空間内の曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ と 平面 $z = 0$ 内の領域 $D : x^2 + y^2 \leqq ax$, $z = 0$ について
(1) 曲面と $z = 0$ に挟まれ，かつ D の上方にある部分の体積を求めよ．

【解答例】（$a > 0$ と明示しておくべきだった．$a < 0$ でも特に難しくなるわけではないが処理が煩わしい．以下では $a > 0$ として解答例を記述する．）体積は

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy \qquad D : x^2 + y^2 \leqq ax$$

で与えられる．これを極座標で座標変換するが問題は積分域の変換だ．D の条件式を極座標で書き直せば $r^2 \leqq ar\cos\theta$ となる．極座標の意味から $r \geqq 0$ なので $0 \leqq r \leqq a\cos\theta$ を得る．これから $\cos\theta \geqq 0$ でなくてはな

らないので θ の範囲は $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ とすればよい．

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}dr &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^{a\cos\theta} = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 - a^3|\sin^3\theta| d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/2} 1-\sin^3\theta d\theta = \frac{2a^3}{3}\left[\theta + \cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\right)a^3\end{aligned}$$

【コメント】

- この計算は極座標で計算すべきだ．極座標の中心を D の中心にとり $x = a/2 + r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするのも自然な発想だがこれでは積分計算ができない．計算の意味を考えずやっていいこととやってはいけないことの区別がついていない人にはできるできないの判断は困難だろうが．
- 極座標で計算するとき θ の範囲の取り方を考えること．円は $x \geqq 0$ の範囲にしかないことに注意せよ．
- $(\sin^2\theta)^{3/2} = |\sin^3\theta|$ だ．高校でも注意されたはずだが，絶対値を落とす人が多い．
- $\sin^3\theta$ の積分は数学 III でも扱っているのではないか．3 倍角の公式を使うのが標準的だが次のようにやったほうが分かりやすいかもしてない．

$$\int \sin^3\theta d\theta = \int (1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}$$

- $1-\cos^2\theta = 1-\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ と処理する人が目につく．以前も見た扱いだが今回は多いと感じた．$1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$ とおくのが普通だと思うが．
- 15 点を配点し，平均点は 4.05 点だった．残念ながら正解はいなかった．

(2) 曲面の D の上方にある部分の曲面積を求めよ．

【解答例】積分域は (1) と同じであり被積分関数は

$$\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

である．ゆえに極座標に変換すれば

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr &= a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a\cos\theta} = a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1-|\sin\theta| d\theta \\ &= 2a^2\int_0^{\pi/2} 1-\sin\theta d\theta = a^2(\pi-2)\end{aligned}$$

【コメント】

- 曲面積の公式を覚えていると思える人には部分点を与えた．他のコメントは (1) と同じなので省略する．計算自体は (1) よりやさしく満点も 2 人いた．
- 15 点配点し，平均点は 4.95 点だった．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 二つの連続関数のグラフ（曲面）$z = f(x, y)$ と $z = g(x, y)$ （$f(x, y) \geqq g(x, y) \geqq 0$）に挟まれ，かつ xy 平面の領域 D の上方にある部分の体積が $\iint_D f(x, y) - g(x, y) dxdy$ で求められることについてリーマン和の考えを用いて説明せよ．

【解答例】D を縦横に細かく分割し各小領域を D_j, $1 \leqq j \leqq N$ と表す．この分割に基づいて考える立体を D_j を断面とする棒状の部分に分割する．$(x_j, y_j) \in D_j$ をとってこの棒状の部分を断面が D_j で長さが $f(x_j, y_j) - g(x_j, y_j)$ の柱体で近似する．すると体積は

$$\sum_{j=1}^{N}(f(x_j, y_j) - g(x_j, y_j))\mu(D_j) \qquad \mu(D_j) = D_j\text{の面積}$$

で近似できる．また分割を細かくしていくとき，求める体積になると考えられる．一方これは連続関数 $f(x, y) - g(x, y)$ のリーマン和であり，分割を細かくしていった時の極限は重積分 $\iint_D f(x, y) - g(x, y)dxdy$ で与えられる．よって体積は重積分に等しくなる．

【コメント】

- リーマン和の形が解答にきちんと記述されているかがポイントだ．
- リーマン和による重積分の定義は厳密に扱うのは難しいが直感的には分かりやすいはずだ．例えばジャガイモを縦横に切れば棒状の断片が出てくるが，その体積は断面積に長さをかけたもので近似できる．だからジャガイモの体積はそれらの和で近似できるが，その和こそリーマン和に他ならない．
- こういう問題が苦手なのは知っている．計算で答えが出るものが数学だと思っているのだろう．数学で重要なのは概念の意味であることを知ってほしい．またそれを考えることの重要さを感じてほしい．10 点満点で平均点は 1.03 点だった．