複素関数の講義メモ (1 月 12 日)

本日の講義の要点

1. 孤立特異点の分類

留数定理により，ジョルダン曲線 C の周上および内部において，内部の有限個の点 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ を除いて正則な関数 $f(z)$ について $\int_C f(z)dz$ は z_i における留数の和 (の $2\pi i$ 倍) として求められる．有限個なので，特異点は孤立している．すなわち孤立特異点のみが現れている．孤立特異点での留数を求めるために，ローラン展開の形によって特異点を分類する．

- z_0 を $f(z)$ の孤立特異点とする．正数 $R > 0$ を $f(z)$ が $0 < |z - z_0| < R$ で正則になるように取る．（このような R の存在が孤立の意味だ．）
- ローランの定理により $0 < |z - z_0| < R$ において $f(z)$ はローラン展開できる．

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

- ローラン展開の負べきの項の和を $f(z)$ の主要部と呼ぶ．

$$f(z) \text{ の主要部} = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \cdots$$

- 主要部が存在しないとき除去可能特異点（除ける特異点）と呼ぶ．

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

  このとき，$f(z_0) = c_0$ と定義しなおしてやれば $f(z)$ は $|z - z_0| < R$ で正則になる．この操作を特異点を除去すると呼ぶことにする．

  例として $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ をあげた．0 は特異点であるが，$\sin z$ のテイラー展開は 1 次の項から始まるので z で割っても負べきの項は現れない．0 は除去可能特異点であり，特異点を除去すれば（$z = 0$ での値を 1 と定義しなおしてやれば）0 の周りで（この場合は全平面で）正則になる．なお $\frac{\sin z}{z}$ の $z = 0$ での値が 1 だと主張しているわけではない．正則にするには特異点を除去しなくてはならない．

- 主要部が 1 個以上の有限個の項からなるとき，極という．$c_{-k} \neq 0$ となる最大の k を m とおくとき，m を極の位数と呼ぶ．また z_0 を $f(z)$ の m 位の極と呼ぶ．

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_k(z - z_0)^k + \cdots$$

- 主要部が無限個の項からなるとき真性特異点と呼ぶ．

2. 極と零点

z_0 が $f(z)$ の位数 m の極とはローラン展開が $-m$ 次の項から始まることを意味する．このとき

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_k(z - z_0)^k + \cdots = (z - z_0)^{-m} f_0(z)$$

とおけば $f_0(z)$ は $f_0(z_0) = c_{-m} \neq 0$ を満たす正則関数である．

z_0 が $f(z)$ の位数 m の零点であるとはテイラー展開（ローラン展開の特殊な場合）が m 次の項から始まることをいう．このとき

$$f(z) = c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \cdots = (z - z_0)^m f_0(z)$$

とおけば $f_0(z)$ は $f_0(z_0) = c_m \neq 0$ を満たす正則関数である．

このように見れば極と零点は非常によく似た概念であることが分かる．次の性質はテキストにはないが重要である．

- $f(z)$ が z_0 で m 位の零点の時，$1/f(z)$ は z_0 で m 位の極になる．
- $f(z)$ が z_0 で m 位の極であるとき，$1/f(z)$ は z_0 で除去可能特異点であり，特異点を除去すれば m 位の零点になる．
- $f(z)$ と $g(z)$ が z_0 でそれぞれ m 位，n 位の零点であるとき $f(z)/g(z)$ は z_0 において $n > m$ のときは $n-m$ 位の極，$n < m$ のときは特異点を除去することにより $m-n$ 位の零点，$m = n$ のときは零点でも極でもない正則な点になる．なお，0 位の零点を零点でないこと，すなわち $f(z_0) \neq 0$ であることとして解釈すれば後半の 2 つの主張は 1 つにまとめられる．

z_0 が $f(z)$ の極であれば $1/f(z)$ の零点である．これは $\lim_{z\to z_0} 1/f(z) = 0$ を意味する．ゆえに

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$$

である．これは極の基本的な性質である．なお，真性特異点においてはこの事実は成り立たない．例えば $f(z) = e^{1/z}$ について 0 は真性特異点（p.153 例 11）であるが，$f(-1/n) = e^{-n}$ は 0 に収束するので無限大に発散しない．

3. 極における留数の求め方

z_0 が $f(z)$ の m 位の極であるとき，

$$f_0(z) = \begin{cases} (z-z_0)^m f(z) & z \neq z_0 \\ c_{-m} & z = z_0 \end{cases}$$

は $|z - z_0| < R$ で正則になる．$f(z)$ の留数は $f_0(z)$ のテイラー展開の $m-1$ 次の項の係数に他ならない．すなわち

$$R(z_0) = \frac{f_0{}^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \lim_{z\to z_0}((z-z_0)^m)f(z))^{(m-1)}$$

もちろん極限の中身が z_0 でも定義できるときは代入するだけでよい．また $m = 1$ の場合は

$$R(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

4. 留数の計算例

p.154 例 1，p.156 例 3 を解説した．ここでは省略する．p.156 に分数関数という項目があるが，これは覚えなくてもよい．テキストの記号のもとに $f(z) = p(z)/q(z)$ で分子は零点でなく（0 位の零点）分母は 1 位の零点なので $f(z)$ は 1 位の極である．よって留数は

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{q(z)}p(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

だが，この計算は積の左側の部分にロピタルの定理を使ったと思えばよい．

本日のレポート課題

p.174 の 6-7 を課題にする．極はいずれも分母が 0 になる点だ．なお $\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$ である．