複素関数の講義メモ (1 月 19 日)

前回のレポート課題

留数計算の問題をやってもらった．計算方法と合わせて解説しておく．

6-7(1)　最も優しい基本的な問題である．まず分母分子とも全平面で正則なので特異点は分母が 0 となる点，すなわち $z = -1$ である．分母は -1 で 1 位の零点，分子は -1 で零点でないので，$f(z)$ は $z = -1$ で 1 位の極である．留数の求め方から

$$R(-1) = \left[(z+1)f(z)\right]_{z=-1} = \left[z^2+2\right]_{z=-1} = 3$$

なお，$z = -1$ でのローラン展開は $z + 1 = w$ とおいて

$$f(z) = f(w-1) = \frac{(w-1)^2+2}{w} = \frac{w^2-2w+3}{w} = \frac{3}{w} - 2 + w = \frac{3}{z+1} - 2 + (z+1)$$

と求められる．留数は -1 乗の項の係数なので 3 である．

6-7(2)　【基本的な用語の意味に基づいた素朴な考え方】分母は $2z + 1$ になっているがローラン展開は $z + 1/2$ のべきで考えなくてはならない．$z + 1/2 = w$ とおけば

$$f(z) = f(w-1/2) = \frac{(w-1/2)^3}{8w^3} = \frac{1}{8w^3}\left(-\frac{1}{8} + \frac{3}{4}w - \frac{3}{2}w^2 + w^3\right) = -\frac{1}{64}\frac{1}{w^3} + \frac{3}{24}\frac{1}{w^2} - \frac{3}{16}\frac{1}{w} + \frac{1}{8}$$

ここで $w = z + 1/2$ と z に戻してやれば $z = -1/2$ におけるローラン展開が得られる．

$$f(z) = -\frac{1}{64}(z+1/2)^{-3} + \frac{3}{24}(z+1/2)^{-2} - \frac{3}{16}(z+1/2)^{-1} + \frac{1}{8}$$

ローラン展開は -3 乗の項から始まるので $-1/2$ は 3 位の極である．また留数は $w^{-1} = (z+1/2)^{-1}$ の項の係数なので $-3/16$ である．

【学習事項を活用した考え方】分母は $-1/2$ で 3 位の零点であり，分子は $-1/2$ で 0 でないので $f(z)$ は $-1/2$ で 3 位の極である．よって $g(z) = (z+1/2)^3 f(z) = z^3/8$ とおけば留数は

$$R(-1/2) = \frac{1}{2!}[g^{(2)}(z)]_{z=-1/2} = \frac{1}{16}[6z]_{z=-1/2} = -\frac{3}{16}$$

【注意】$(2z+1)^3$ をかけてしまう人が目についた．これだと留数は 8 倍になってしまう．

6-7(3)　$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$ である．分母分子とも全平面で正則なので，特異点は分母の零点である．$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ より零点は $e^z = e^{-z}$ すなわち $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^{-x-iy} = e^{-x}e^{-iy}$ を満たす点である．りょうへんの絶対値が等しいことから $e^x = e^{-x}$，すなわち $x = 0$ である．また両辺の偏角が等しいことから $y = -y + 2n\pi$ すなわち $y = n\pi$ である．よって分母の零点は $n\pi i$ である．これは 1 位の零点なので（あとで説明する）$n\pi i$ は $f(z) = \coth z$ の 1 位の極である．

$$R(n\pi i) = \left[(z-n\pi i)\frac{\cosh z}{\sinh z}\right]_{z=n\pi i} = \lim_{z\to n\pi i}\frac{z-n\pi i}{\sinh z}\cosh z = \frac{1}{\cosh n\pi i}\cosh n\pi i = 1$$

ここで $n\pi i$ は代入できないので極限で考えている．また極限の左側の部分はロピタルの定理で考えている．

なおこの関数は p.156 の 3（分子が 0 点でなく分母が 1 位の零点である場合）が使える形になっている．分母の微分は $\cosh z$ なので

$$R(n\pi i) = \left[\frac{\cosh z}{(\sinh z)'}\right]_{z=n\pi i} = 1$$

命題 正則関数 $f(z)$ が $z = c$ で m 位の零点であることは次と同値である．

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0, \qquad f^{(m)}(c) \neq 0$$

証明　$f(z)$ が m 位の零点であればテイラー展開が m 次の項から始まる．テイラー展開の k 次の項の係数は $f^{(k)}(c)/k!$ なので $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0, \qquad f^{(m)}(c) \neq 0$ である．この議論を逆にたどれば逆の証明も得られる．

ゆえに 2 位以上の零点は $f(z)$ と $f'(z)$ の共通零点である．$\sinh z$ の導関数は $\cosh z$ であり，$\cosh^2 z - \sinh^2 z - 1$ なのでともに 0 になることはないので 2 位以上の零点は存在しない．

6-7(4)　分子の $e^z = e^x e^{iy}$ は絶対値が e^x なので 0 になることはない．分母は $(z + i\pi)(z - i\pi)$ なので $\pm i\pi$ で 1 位の零点である．よってこの関数は $\pm i\pi$ で 1 位の極である．

$$R(\pm i\pi) = [(z \mp i\pi)f(z)]_{z=\pm i\pi} = \left[\frac{e^z}{z \pm i\pi}\right]_{z=\pm i\pi} = \frac{-1}{\pm 2i\pi} = \pm\frac{i}{2\pi}$$

【注意】この問題では $i\pi$ と $-i\pi$ を複号を使って同時に扱っている．このような式では複号は同順で扱わなければならないが，その意識があまり感じられない答案が目につく．きをつけること．

6-7(5)　分母の $\cos z$ の零点は $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ より $e^{iz} = -e^{-iz}$ である．$z = x + iy$ とおいて

$$e^{-y} = e^{y} \qquad e^{ix} = -e^{-ix}$$

より $y = 0$ と $x = -x + (2n+1)\pi$ を得る．すなわち $z = (n + 1/2)\pi$ である（これは実関数としての $\cos z$ の零点と一致）．$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ と $(\cos z)' = -\sin z$ より 2 位以上の零点は持たないのでこれらはすべて 1 位の零点である．この零点で分子の z は 0 でないので，与えられた関数は $z = (n + 1/2)\pi$ で 1 位の極を持つ．また零点でない関数を 1 位の零点をとる関数で割った形なので，156 ページの 3 が使える．

$$R((n + 1/2)\pi) = \left[\frac{z}{-\sin z}\right]_{z=(n+1/2)\pi} = (-1)^{n+1}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

6-7(6)　分子の $z^{1/4}$ は 4 価の関数である．すなわち

$$z^{1/4} = (re^{i\theta})^{1/4} = \sqrt[4]{r}e^{i\theta/4}$$

なので，z の偏角の取り方を $\theta,\ \theta + 2\pi,\ \theta + 4\pi,\ \theta + 6\pi$ と変えていくと 4 乗根として 4 つの異なる値が出てくる．テキストの条件 $0 < \arg z < 2\pi$ は $z^{1/4}$ の偏角を 0 から $\pi/2$ の範囲にとることを指定している．これによって $z^{1/4}$ は複素平面から実軸の正方向の部分を原点を含めてより除いた集合上での正則関数になる．分母の零点は -1 だが

$$(-1)^{1/4} = (e^{i\pi})^{1/4} = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \neq 0$$

なので -1 は 1 位の極である．留数は

$$[(z+1)f(z)]_{z=-1} = [z^{1/4}]_{z=-1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

本日の講義の要点

1. 実関数の積分への応用（有理関数の広義積分）
   $p(x), q(x)$ を実係数多項式とし有理関数 $p(x)/q(x)$ を考える．

- $q(x) = 0$ は実数解を持たない．
- 分子 $p(x)$ の次数は 分母 $g(x)$ の次数より 2 以上小さい．（$p(x)$ の次数 $+2 \leqq q(x)$ の次数）

を満たすとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} R(z_j)$$

が成り立つ．ただし z_j, $1 \leqq j \leqq N$ は $q(x) = 0$ の解のうち実部が正であるもの，$R(z_j)$ は $f(z) = p(z)/q(z)$ の z_j における留数である．

2. 実関数の積分への応用（有理関数に $\cos x$（または $\sin x$）をかけたものの広義積分

$p(x), q(x)$ を実係数多項式とし有理関数 $p(x)/q(x)$ を考える．

- $q(x) = 0$ は実数解を持たない．
- 分子 $p(x)$ の次数は 分母 $g(x)$ の次数より 1 以上小さい．（$p(x)$ の次数 $+1 \leqq q(x)$ の次数）

を満たすとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} (\cos x + i \sin x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} R(z_j)$$

が成り立つ．ただし z_j, $1 \leqq j \leqq N$ は $q(x) = 0$ の解のうち実部が正であるもの，$R(z_j)$ は $f(z) = p(z)/q(z)e^{iz}$ の z_j における留数である．

3. 上の二つが成り立つ理由

どちらも証明のアイデアは同じである．$f(z)$ を実軸の $[-r, r]$ の部分と半円 $C_r : z = re^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ をつないだ積分路 C で積分すれば，留数定理からその和は内部の特異点における留数の和になる．

$$\int_C f(z)dz = \int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{C_r} f(z)dz$$

ここで実軸の部分 $[-r, r]$ では z は実数なので x と書いている．ここで r を十分大きくすれば，$f(z)$ の虚部正の特異点をすべて含むので，積分値は留数の総和から求められる．さらに $r \to \infty$ とすれば第 1 項は求める広義積分になる．よって $r \to \infty$ のとき $\int_{C_r} f(z)dz \to 0$ が成り立つことを示せばよい．

- 十分大きな $r > 0$ について C_r 上 $|f(z)| < M(1/r^2)$ が成り立つ場合

$$\left| \int_{C_r} f(z)dz \right| \leqq \int_{C_r} |f(z)||dz| < \frac{M}{r^2} \int_{C_r} |dz| = \frac{M\pi}{r} \longrightarrow 0 \quad (r \to \infty)$$

- 十分大きな $r > 0$ について C_r 上 $|f(z)| < M(1/r)e^{-y}$ が成り立つ場合

$$\left| \int_{C_r} f(z)dz \right| \leqq \int_{C_r} |f(z)||dz| < \frac{M}{r} \int_{C_r} e^{-y}|dz| = M \int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta} d\theta < \frac{M\pi}{r} \longrightarrow 0 \quad (r \to \infty)$$

ここでジョルダンの不等式（p.165）を使っている．

4. 講義で扱った計算例

p.159 の例 1，p.160 の例 2，p.166 の例 7 を扱った．テキストに出してない問題では

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

を扱った．まず被積分関数は偶関数なので，$-\infty$ から ∞ の範囲での積分にして 2 で割ればよい．また分子の次数が分母の次数より 2 小さいので，留数定理が利用できる．上半平面での特異点は i のみである．

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \pi i R(i)$$

i は 2 位の極なので $(z-i)^2$ をかけた関数の導関数の i での値を求める．

$$(z-i)^2 \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{z^2}{(z+i)^2} \qquad \left(\frac{z^2}{(z+i)^2}\right)' = \frac{2z(z+i)^2 - 2(z+i)z^2}{(z+i)^4}$$

より i を代入すれば $-i/4$ になる．よって積分値は $(\pi i)(-i/4) = \pi/4$ である．

5. 上の関数でなぜ 2 位の極かわからないという質問があったので解説しておこう．
   極の位数とはローラン展開が何次の項から始まるかを見ればよいのだがローラン展開を求めるのは難しい．
   実用的には次のように考えるといい．
   - $f(z)$ が α で m 位の極をとるとき，$g(\alpha) \neq 0$ を満たす正則関数をかけても極の位数は変わらない．すなわち $f(z)g(z)$ も α で m 位の極をとる．
   - $f(z)$ が α で m 位の零点をとるとき，$1/f(z)$ は α で m 位の極をとる．

   例えば $(z-i)^2$ は i で 2 位の零点をとる．よって $1/(z-i)^2$ は i で 2 位の極である．よってこれに $z^2/(z+i)^2$ をかけた $z^2/(z^2+1)^2$ も i で 2 位の極をとる．

本日のレポート課題

p.175 の 6-14 と 6-15 を課題にする．量が多いのでできる範囲でかまわない．