

複素関数の講義メモ (1月26日)

前回のレポート課題

6-14 は有理関数の広義積分である。留数定理を利用できる条件は、

- 分母の次数が分子の次数より 2 以上大きいこと
- 実軸上に特異点を持たないこと、すなわち方程式「分母 = 0」が実数解を持たないこと

の二つである。最初の条件は被積分関数を見ればすぐわかる。2 番目の条件を見るには被積分関数の特異点 (分母 = 0 を満たす点) を求めればよい。なお既約な有理関数 (共通因数があれば約分しておく) の特異点はすべて極であり、極の位数は分母の零点の位数である。なお 1 位の極についての分数式の留数は p.154 の (1) 式よりも p.156 の (4) 式を使ったほうがはるかに簡単だ。簡単になる理由は

- p.154 の (1) を使う際には $(z - z_0)p(z)/q(z)$ の約分が必要になるが p.156 の (4) では不要。
- p.154 の (1) では $z = z_0$ での値を考える関数 $(z - z_0)f(z)$ が特異点ごとに変わるが p.156 の (4) では $p(z)/q'(z)$ とすべて同じ関数である。

特に 2 つ目の理由は複数の 1 位の極を持つ場合に有効である。ただし 2 位の極については使えない。この場合は (1) 式の拡張である p.155 の (2) 式を使うしかない。

(a) $x^4 + 1 = 0$ の解は $e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4}$ なので、実数解は存在しない。このうち上半平面にあるのは $e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}$ である。これらは重解ではないので零点の位数は 0 であり、被積分関数の極の位数も 1 である。

$$R(e^{i\pi/4}) = \left[\frac{1}{(z^4 + 1)'} \right]_{z=e^{i\pi/4}} = \frac{1}{4e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4} \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right)$$
$$R(e^{i3\pi/4}) = \left[\frac{1}{(z^4 + 1)'} \right]_{z=e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4e^{i9\pi/4}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)$$

偶関数の $[0, \infty)$ での積分なので、留数で得られる $(-\infty, \infty)$ での積分値を 2 で割る。(すなわち留数の和の πi 倍にする)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \pi i (R(e^{i\pi/4}) + R(e^{i3\pi/4})) = \pi i \frac{-2i}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(b) 分母の零点は 6 つあり、それらは重解ではないので零点の位数は 1 である。上半平面では、絶対値が 1 で偏角が $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6$ の 3 つである。留数は

$$R(e^{i\pi/6}) = \left[\frac{z^2}{(z^6 + 1)'} \right]_{z=e^{i\pi/6}} = \left[\frac{1}{6} z^{-3} \right]_{z=e^{i\pi/6}} = \frac{1}{6} (e^{i\pi/6})^{-3} = -\frac{i}{6}$$
$$R(e^{i\pi/2}) = \frac{1}{6} e^{-i3\pi/2} = \frac{i}{6} \quad R(e^{i5\pi/6}) = \frac{1}{6} e^{-i5\pi/2} = -\frac{i}{6}$$

(c) 極は $\pm i$ であり位数は 2 である。上半平面での極、 i における留数は

$$R(i) = \left[\left((z-i)^2 \frac{1}{(z^2+1)^2} \right)' \right]_{z=i} = \left[-2(z+i)^{-3} \right]_{z=i} = \frac{1}{4i}$$

よって

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \pi i R(i) = \frac{\pi}{4}$$

(d) 上半平面での極は $2i$ と $3i$ でいずれも 1 位の極である. p.156 の (4) を使って留数を求めるが, 点に応じて分母の見方を変える.

$$R(2i) = \left[\frac{z^2/(z^2+9)}{(z^2+4)'} \right]_{z=2i} = \left[\frac{z^2}{2z(z^2+9)} \right]_{z=2i} = \frac{-4}{20i} = -\frac{1}{5i}$$

$$R(3i) = \left[\frac{z^2/(z^2+4)}{(z^2+9)'} \right]_{z=3i} = \left[\frac{z^2}{2z(z^2+4)} \right]_{z=3i} = \frac{-9}{-30i} = \frac{3}{10i}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = \pi i \left(-\frac{1}{5i} + \frac{3}{10i} \right) = \frac{\pi}{10}$$

6-15 は有理関数に $\cos x$ または $\sin x$ をかけたものの広義積分である. 留数定理を使える条件は分母の次数が分子の次数より 1 以上大きいことなので必ずチェックすること.

(a) $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ について上半平面の極は ai, bi でありいずれも 1 位の極である ($0 < b < a$). 留数は

$$R(ai) = \left[\frac{e^{iz}}{2z(z^2+b^2)} \right]_{z=ai} = \frac{e^{-a}}{2ai(b^2-a^2)} \quad R(bi) = \left[\frac{e^{iz}}{2z(z^2+a^2)} \right]_{z=bi} = \frac{e^{-b}}{2bi(a^2-b^2)}$$

求める広義積分は $\cos x$ をかけた式なので実部をとる.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx = \operatorname{Re} (2\pi i(R(ai) + R(bi))) = \frac{\pi}{a^2-b^2} \left(\frac{1}{be^b} - \frac{1}{ae^a} \right)$$

本日の講義の要点

1. 実軸に特異点がある場合の留数定理の応用

例 8 (p.167) 例 9 (p.168) 例 10 (p.169) を解説した. いずれも積分路を特異点を避けるように取らなくてはならない. 典型的な計算例であり味わっておくとよい. なお例 10 では被積分関数 $f(z) = \frac{z^a}{1+z}$ の理解の仕方が問題になる. 解答例では $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ の範囲に取り $z^a = r^a e^{ia\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ と定めている. テキストの図 6-8 の記号を使えば線分 PQ では第 1 象限の縁と考え $z^a = x^a$ としている. 線分 SR では第 4 象限の縁と考え $z^a = x^a e^{2\pi ai}$ としている. この理解で留数定理が利用できる.

講義での解説はテキストと同じなので省略する.

2. 三角関数の有理式の積分, 例 11 (p.172)

単位円周上において $z = e^{i\theta}$ により

$$\int_C F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz} dz = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

が成り立つ. 左辺に被積分関数は有理関数であり, 単位円上に極を持たなければ積分値は留数定理で計算できる. このことについて, うまく説明できないまま授業時間が終わってしまったのでここにまとめておく.

$$\int_C \frac{1}{1+a\frac{z-z^{-1}}{2i}} \frac{1}{iz} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\sin \theta} d\theta$$

後は左辺の被積分関数の極と位数, 留数を求めればよい. あとの計算はテキストを見ること.

今日の講義ですべての内容を終えた. 留数を応用した実積分の計算は従来積分計算と全く異なるので興味深いと思う. 自分で計算しておくように.