

複素関数の講義メモ (9月29日)

微分積分における変数を複素数にすると実数の場合とは全く異なる様々な事実が得られる。一方、計算については実数の場合と同様に行える。この講義ではその事情を詳しく紹介するとともに実積分計算への応用などを解説する。

本日の講義の要点

1. 複素数と複素平面

複素数と複素平面に関する基本事項をテキストをもとにまとめておく。簡単なことだが正確に理解しておくように。

- 複素数, 実部, 虚部, 和, 差, 積, 商, 零元, 単位元 (1-1 節)

すべて高校で習っていることだ。例の計算例は自分でやっておくこと。なお虚部 $\text{Im}z$ は実数であることに注意せよ。この節で最も重要なのは複素数全体の集合で四則演算が自由に行える（もちろん 0 で割ることを除く）ことだ。事実として覚えるのではなく、当たり前のこととして感じられるように。

- 複素平面, 実軸, 虚軸, 絶対値, 共役複素数, 三角不等式 (1-2 節)

複素数 $x+iy$ を座標平面の点 (x,y) と対応させたとき複素平面という。簡単なことだ。例 3 は高校でも学習したと思う。証明は $z = x+iy$ において計算するだけだ。積の証明だけでもいいのでやっておくように。

例 4 は三角不等式だ。図形的に理解する方法, 計算で理解する方法があるので両方確認しておくこと。

- 極形式, 偏角, 主値, オイラーの公式 (1-3 節)

極座標に対応する複素数の表示だ。なお曲形式はオイラーの公式を利用して $z = re^{i\theta}$ と表してほしい。オイラーの公式により加法定理は指数法則として理解しなおすことができる。

$$e^{i\theta} e^{i\varphi} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) = e^{i(\theta + \varphi)}$$

偏角 $\arg z$ とその主値 $\text{Arg} z$ の違いに気をつけること。 $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ は成り立つが, $\text{Arg}(zw) = \text{Arg} z + \text{Arg} w$ は一般には成り立たない。

- ド・モアブルの公式, ベキ乗, ベキ根 (1-4 節)

$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ より, n 乗根は

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta/n)}$$

である。 z の偏角 θ は $\theta + 2k\pi$ としても良いので $z^{1/n}$ の偏角は

$$\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

となる。 $z^{1/n}$ の絶対値は $\sqrt[n]{r}$ なので, z の n 乗根は原点を中心とする正 n 角形の頂点となる。0 でない複素数の n 乗根がちょうど n 個あることに注意せよ。

講義では p.14 の例 2 を考えてもらった。 $-8i$ の絶対値と偏角が分かれば簡単なはずだ。テキストの解答も参考に自分で考えてみよ。

- ε 近傍, 領域 (1-5 節)

領域について「有限個の滑らかな曲線で囲まれた集合」と理解することにした。この授業の目的ならこの程度の理解で十分だと思う。

2. 複素変数の関数

この講義では関数 $w = f(z)$ で $z = x + iy$ と $w = u + iv$ がともに複素数であるものを扱う．変数を表す文字の使い分けに注意すること． x, y, u, v は実数であり $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおくとき， $u(x, y), v(x, y)$ は実の 2 変数関数である．複素関数は 2 つの 2 変数関数の組として理解できる．例として $w = z^2$, $w = |z|^2$, $w = e^z$ の三つを紹介した．

今日のところは，難しい問題はなかったと思う．レポート課題としては偏角とべき根とに関する問題を与えておく．締め切りは 10 月 2 日 (金)13 時，研究室（理学部 3 号館 4 階 D416）の前に提出箱を置いておくのでその中に入れてほしい．

本日のレポート課題

課題 1 次の複素数の偏角を求めよ（問 1-21）

$$(a) z = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i} \quad (c) z = (\sqrt{3} - i)^6$$

課題 2 次のべき根を求め図示せよ（問 1-23）

$$(b)(1 - \sqrt{3}i)^{1/2} \quad (c)(-1)^{1/3}$$

来週の講義のために

2-4 節の導関数と微分公式まで扱う予定である．テキストを眺めておいてほしい．