複素関数の講義メモ (10 月 6 日)

前回のレポート課題について

易しい問題だと思っていたがつまらない誤解をしている人も多い．いくつか注意すべき点をコメントしておく．

- $a+bi$ の偏角を求めるには，(a,b) の座標平面での位置を考えて行うこと．$\tan\theta = b/a$ から議論すると角度は一通りに決まらない．$\tan\theta = -\sqrt{3}$ からは $\theta = 2\pi/3,\ -\pi/3$ のいずれかであることしか導かれない．なお $a+bi$ は座標平面の点 (a,b) に対応する．これを (a,bi) と書かないように．
- $z = a+bi$ の偏角が α のとき z^{-1} の偏角は $-\alpha$ であり z^6 の偏角は 6α だ．α だと勘違いしている人が複数いた．また正数倍しても偏角は変わらないが負数倍すると偏角は $-\alpha$ になる．このように計算によって偏角がどう変わるのかきちんと理解しておくこと．
- z の偏角を $\alpha+2k\pi$ とおき，z^6 の偏角を $6\alpha+12k\pi$ とする人が少なくない．これは厳密には正しくない．$\arg z$ とは一つの決まった値ではなく 2π の整数倍の差は同じものとみなしている．従って

$$\arg z^6 = 6\arg z$$

という等式の両辺は 2π の整数倍の違いを許容した上で成り立つ式だ．$\arg z^6 = 6\alpha$ と書くのは問題ないが $\arg z^6 = 6\alpha + 12k\pi$ と書いてしまうと 12π の整数倍の違いしか許容していないように見える．誤解しやすいので注意してほしい．

  一方 $z^{1/2}$ の偏角は $\alpha/2 + k\pi$ としなくてはならない．2π の整数倍の違いは同じ角という前提から，異なる角として得られるのは $\alpha/2$ と $\alpha/2+\pi$ だ．大事なのは形式的な計算ではなく，実際にどういう角度を表しているのか意識することだ．例をあげておこう．

  > $1+i$ の偏角は $\pi/4$ だ．これを $\pi/4+2k\pi$ として $(1+i)^6$ の偏角を $3\pi/2+12k\pi$ と表記してしまったとする．そしてこの 1/2 乗をとり $((1+i)^6)^{1/2}$ の偏角を $3\pi/4+6k\pi$ としたとする．これは間違いである．
  >
  > $(1+i)^6 = -8i$ でありその 1/2 は 2 つあって $((1+i)^6)^{1/2} = \pm(-2+2i)$ である．よってその偏角は $3\pi/4+k\pi$ である．

- $(\sqrt{3}-i)^6$ の偏角を求める際に，直接計算して -64 の偏角を求める人がいる．確かに正解だが $(\sqrt{3}-i)^{47}$ の偏角を求めようとするとうまくいかない．やはり $(\sqrt{3}-i)$ の偏角を求め，それを 6 倍する形で答えてほしい．

本日の講義の要点

1. 近傍，内点，開集合，連結，領域，リーマン球，無限大
   - p.14 から 15 の基本的定義を確認したうえで例 1 と例 2 を解説した．この用語は他の授業でも扱うのでここでは直感的理解に止める．
   - 複素数の集合 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付け加えた集合を拡張された複素平面という．これは立体射影によって球面（リーマン球）と同一視される．なお，∞ は複素数ではないが，写像によっては定義域と値域に ∞ を含める場合がある．
2. 複素関数の極限と連続性について
   - 前回，簡単に述べたことだが時間がなかったので説明が不十分だったかもしれない．要点は

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

なので，$f(z)$ の極限，連続性を $u(x,y), v(x,y)$ の極限，連続性として理解できることだ．要するに微分積分 II の講義で学習済みだ．
なお，極限と連続性については $\varepsilon\delta$ 論法という定番の議論があるが，これについては実数と論理で扱うのでここでは 1 年次と同様に直感的な理解に止める．

- 実数の場合との大きな違いは無限大 ∞ の扱いだ．次の 2 つの極限を比較してみてほしい．

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{1}{x} = \pm\infty\,(\text{実の場合}) \qquad \lim_{z\to 0}\frac{1}{z} = \infty\,(\text{複素の場合})$$

複素数では正負という考えがないことに注意せよ．

- $z \to z_0$ は $|z-z_0| \to 0$ を意味する．$z \to \infty$ は $|1/z| \to 0$ を意味する．これは $1/z \to 0$ と同値である．

3. 複素関数の微分，導関数，微分公式

微分や導関数の定義は実数の場合とまったく同様だ．しかし極限が複素平面での極限なので大きな違いがある．

- $(z^n)' = nz^{n-1}$ が成り立つ．

$$\lim_{z\to z_0}\frac{z^n - {z_0}^n}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}{z_0}^2 + \cdots + z{z_0}^{n-2} + {z_0}^{n-1} = n{z_0}^{n-1}$$

- $f(z)$ が z_0 で微分可能なら z_0 で連続である．（p.33 の一番下に証明が記述されている．）
- 積の微分法則が成り立つ．（定理 2(p.34) の一部）
証明は実数の場合と同じである．

$$\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}g(z) + f(z_0)\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

であるが，右辺の極限は微分可能の仮定から $f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ になる．ただし $g(z)$ の z_0 での連続性を使っている．他の証明も同じようにできるので考えてみると良い．

- $w = |z|^2$ が 0 以外で微分不可能であること (p.33 例 2)
この例から複素関数としての微分が偏微分や全微分と異なる概念であることが分かる．意外な事実と感じるだろう．

$$\frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} = \frac{z\bar{z} - z_0\overline{z_0}}{z - z_0} = \bar{z} + z_0\frac{\bar{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$$

であるが $z - z_0 = re^{i\theta}$ とおけば右辺は $\bar{z} + z_0e^{-2i\theta}$ になる．$z \to z_0$ のとき，$z - z_0$ の偏角は何の制約も受けないので，$e^{-2i\theta}$ は絶対値 1 のあらゆる複素数の値をとることができる．よって $z_0 \neq 0$ の場合は，一定の値に近づくとは言えない．すなわち $z_0 \neq 0$ で微分不可能である．

4. コーシー・リーマンの方程式

複素関数の極限は実部虚部の 2 変数関数としての極限である．

$$\lim_{z\to c} f(z) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) + i\lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y) \quad c = a + ib, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

ここで右辺が収束すれば $y = b$ と固定して $x \to a$ とした極限も同じ値に収束する．この考えを微分の定義式に適用して得られるのがコーシー・リーマンの方程式である．ゆえに微分可能ならコーシー・リーマンの方程式が成り立つ．
逆に C^1 級関数 $u(x,y), v(x,y)$ がコーシー・リーマンの方程式を満たせば $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ は微分可能になる．このことの証明は次回与える．

本日のレポート課題

第 2 章章末問題の 2-18 と 2-21(c)(d) を課題にする．どちらも微分可能でないことを示す問題だが 2-18 は微分の定義を使って直接証明してほしい．2-21 はコーシー・リーマンの方程式を利用して示すこと．