複素関数の講義メモ (10 月 13 日)

前回のレポート課題について

2-18　微分可能性の定義により次の極限の収束性を調べる．

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

$\Delta y=0$ とおいて 0 に近づければ（実軸に沿って 0 に近づければ）

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

である．$\Delta x=0$ とおいて 0 に近づければ (虚軸に沿って 0 に近づければ）

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-i\Delta y}{i\Delta y}=-1$$

である．近づけ方によって極限が変わるのでこの極限は存在しない．よって微分不可能である．

2-21(c)　$u=2x,\ v=xy^2$ よりコーシー・リーマンの方程式は

$$2=2xy\ (u_x=v_y)\qquad 0=-y^2\ (u_y=-v_x)$$

である．第 2 式より $y=0$ だがこのとき第 1 式は $2=0$ となり両方が成り立つことはない．いかなる点でもコーシー・リーマンの方程式は成立せず微分不可能である．

2-21(d)　$u=e^x\cos y,\ v=-e^x\sin y$ よりコーシー・リーマンの方程式は

$$e^x\cos y=-e^x\cos y,\qquad -e^x\sin y=e^x\sin y$$

である．いかなる実数 x についても $e^x\neq 0$ なので $\cos y=\sin y=0$ でなくてはならないが三角関数の定義からこのような y は存在しない．よっていかなる点でも微分不可能である．

【コメント】

- この問題を通じて，実 2 変数関数としての微分と複素関数としての微分の意味の違いを確認してほしい．
- 2-18 は微分可能性の定義に基づいて議論するように指示した．複素関数の極限は基本的に 2 変数関数の極限なので近づけ方によって極限が変わってしまうことを言えばよい．なお，解答例と同じ議論を行ってから，最後の理由をコーシー・リーマンの方程式が成り立たないからとした答案が目についたが，これは見当違いだ．
- 2-19 はコーシー・リーマンの方程式を利用して解答するように指示した．ただし
  - $u_x=v_y,\ u_y=-v_x$ が成り立たない．
  - いかなる点でも $u_x=v_y,\ u_y=-v_x$ が成り立たない．

  という二つの主張は全く異なる内容だ．求められているのは後者であり，前者の議論では正解にはならない．

  例えば，2-21(c) ではコーシー・リーマンの方程式は連立方程式 $2=2xy,\ 0=-y^2$ の解が存在しないことを言わなくてはならない．これに理由が必要なことは明らかだろう．単に両辺の式が異なるという話ではない．

本日の講義の要点

1. コーシー・リーマンの方程式と微分可能性（p.37 定理 2）
   複素関数が微分可能な時，コーシー・リーマンの方程式が成立することは前回調べた．今回は全微分可能性（教程微分積分 p.123 定義 6.3）を仮定してこの逆を示した．証明方法は基本的にテキストに記述してあるものと同じ方法である．なお，全微分可能でないときは逆は成立しない（演習問題 2-26）．
   関数 $w = e^z = e^x e^{iy}$ はいたるところコーシー・リーマンの方程式を満たす．C^1 級であることは明らかなので e^z はすべての点で微分可能である．
2. 複素関数の正則性
   $f(z)$ が z_0 で正則であるとは，z_0 の近傍の各点で微分可能なことを言う．$f(z) = |z|^2$ は $z = 0$ で微分可能だが正則ではない．定義から $f(z)$ が正則になるような点の集合は開集合である．この事実は距離空間・位相空間に関する用語になれれば簡単なことだが，今の段階では分かりづらいだろう．今後，ある開集合で正則な関数を考察の対象にするが，決して特別な状況を仮定しているのではないことを知っておいてほしい．
   なお $f(z)$ が閉円板 $D : |z| \leqq 1$ で正則であるとは D を含む開集合で正則な関数に拡張できることを言う．
   正則関数の例としては $w = z^n$ と $w = e^z$ がある．これらは $\mathbb{C}$ 上正則であるが，このように複素平面全体で正則な関数を整関数という．
3. 正則関数の和差積商合成
   ある開集合で正則な 2 つの関数の和，差，積は正則である．また商は分母が 0 にならない範囲で正則だし，合成は定義できる範囲（の内部）で正則である．これらの事実は p.34 の微分公式が成り立つことによる．証明も実関数の場合と基本的に同じである．
4. 正則関数と調和関数
   $z = f(z)$ が正則な時，その実部と虚部は実 2 変数関数として調和関数になる（p.41 定理 3）．証明は C^2 級であることを仮定して与えた．偏微分の順序交換（教程微分積分 p.132 定理 6.7）を利用しているが 1 年次のテキストを確認しておくこと．
5. 指数関数
   $w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ は $\mathbb{C}$ 上で正則である．これについて指数法則が成り立つことは結果のみ紹介したがここに証明をつけておく．$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ とおく．

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) \\ &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2 + i\cos y_1\sin y_2 + i\sin y_1\cos y_2) \\ &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_2)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) = e^{z_1}e^{z_2} \end{aligned}$$

   実関数の場合の指数法則と加法定理が使われていることに注意せよ．
   指数関数について例 3(p.50) を解説した．$e^z = e^x\cos y + ie^x\sin y = -1$ なので，連立方程式 $e^x\cos x = -1,\ e^x\sin y = 0$ を解けばよい．難しくないので考えておくように．
6. 三角関数
   オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ より $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2,\ \sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$ を得る．この x を複素数に置き換えた式を (複素) 三角関数の定義式にする．

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

   指数関数は整関数なのでこの 2 つの関数も整関数である．また例 1 にまとめた様々な性質も得られる．確認してみると良い．

$\cos z$ を実部と虚部に分けると

$$\begin{aligned}2\cos z &= e^{iz} + e^{-iz} = e^{ix-y} + e^{-ix+y} = e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)\\ &= \cos x(e^{y} + e^{-y}) - i\sin x(e^{y} - e^{-y}) = 2\cos x\cosh y - 2i\sin x\sinh y\end{aligned}$$

である．ここで $\cosh x = (e^{x} + e^{-x})/2,\ \sinh x = (e^{x} - e^{-x})/2$ であり，双曲線関数と呼ばれる．コサインハイパボリックのように読んでほしい．

双曲線関数と三角関数はとても類似した関数であり，三角関数の各公式に対応する双曲線関数の公式が作れる．難しくはないがここで深入りするのは避ける．

講義では例 4（p.53）を解説したがテキストの説明を読んでおいてほしい．

本日のレポート課題

第 2 章章末問題の 3-3 と 3-9 を課題にする．どちらも $z = x + iy$ とおいて書き下し，実部と虚部から連立方程式を作って考えるとよい．