複素関数の講義メモ (10 月 20 日)

前回のレポート課題について

一つの考え方は絶対値と偏角を考える方法である．(a) について $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ より e^z の絶対値は $e^x > 0$ 偏角は y である．-2 は絶対値 2 偏角 $\pi + 2n\pi$ なので $e^z = 2$ は

$$e^x = 2 \qquad y = \pi + 2n\pi$$

となる．ゆえに $z = x + iy = \log 2 + (2n+1)\pi i$ である．なお両辺の偏角が等しいという式をたてるときは一方のみ $2n\pi$ を足して一般表示にすれば十分だ．

次の考え方は実部と虚部を利用する方法で (b) について $e^z = 1 + \sqrt{3}i$ から

$$e^x \cos y = 1 \qquad e^x \sin y = \sqrt{3}$$

という連立方程式を解く方法である．ただしこれから x を消去して $\tan y = \sqrt{3}$ としてしまうと失敗する．これを満たす角は $\pi/3 + k\pi$ だが k が奇数のときは $\cos y < 0$ となり連立方程式を満たさない．一般に未知数の消去は「ならば」という一方向の論理であって逆が成り立たないからだ．最初の方法を使えば $1 + \sqrt{3}i$ が絶対値 2，偏角 $\pi/3 + 2n\pi$ なので

$$e^x = \log 2 \qquad y = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

を解く．このほうが簡単だ．

ただし 3-9 は 2 番目の方法が良い．$w =$ 実数 $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, w = 0,\quad w =$ 純虚数 $\Leftrightarrow \mathrm{Re}\, w = 0,$ かつ $w \neq 0$ だからだ．偏角は 2 通りあるので最初の方法だと両方考えないといけない．なお $|e^z| = e^x > 0$ なので $e^z = 0$ となることはない．

$$e^z = \text{実数} \Longleftrightarrow e^x \sin y = 0 \Longleftrightarrow \sin y = 0 \Longleftrightarrow y = n\pi$$

$$e^z = \text{純虚数} \Longleftrightarrow e^x \cos y = 0 \Longleftrightarrow \cos y = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

どちらも必要十分条件であることが容易に見て取れる．

なお解を求めるときには複素数として表示してほしい．(c) で $x = 1/2,\ y = k\pi$ としても間違いではないが $z = 1/2 + k\pi i$ のように表すこと．

本日の講義の要点

1. 前回の補足
   - 指数関数・三角関数の導関数

     $w = f(z) = e^z$ を実部と虚部に分ければ $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ となる．これからコーシー・リーマンの方程式 $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$ がすべての点で成り立つことが簡単に確かめられる．すなわち

     $$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z}$$

     は収束する．ここで $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ で $\Delta y = 0$ とおいてから $\Delta x \to 0$ としても同じ極限に収束する．これは y を固定して x で微分することに他ならないので偏微分である．すなわち

     $$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

     であり $(e^z)' = e^z$ を得る．

     $\cos z,\ \sin z$ の定義式 (p.50 下から 3 行目) とこの結果から三角関数の導関数も計算できる．(p.51 (2) 式)

- 双曲線関数

  双曲線関数は 1 年次のテキストに載っていなかった．定義式 (p.54 (21) 式) が三角関数の定義式とよく似ていることに気づいてほしい．なお実数 x について $\cosh x$, $\sinh x$ は実数であり $(\cosh x, \sinh x)$ は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の点になる．双曲線関数と呼ぶのも納得できるだろう．

2. 対数関数

$z \neq 0$ について $e^w = z$ を満たす $w = u + iv$ を求めれば $e^u = |z|$, $v = \arg z$ である．そこで

$$\log z = \ln |z| + i \arg z$$

と定める．ln は自然対数を表す記号[*1]でこの講義では実の自然対数を表すものとする．なお $z = 0$ については対数は定義できない．$\log z$ において $z \neq 0$ は前提だ．

- 対数関数は多価関数

  複素数の偏角は 2π の整数倍の違いで定まらないので $\log z$ は通常の意味での関数ではなく多価関数である．ただし主値をとって

  $$\mathrm{Log}\, z = \ln |z| + i \mathrm{Arg}\, z$$

  とおけば関数になる．$\log z = \mathrm{Log}\, z + 2k\pi i$ に注意せよ．

- 対数関数の微分可能性

  $z = x + iy$ で $x \neq 0$ のとき

  $$\log z = \log |z| + i \arg z = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \tan^{-1} \frac{y}{x} + 2k\pi i$$

  だ．これからコーシー・リーマンの方程式が成り立つことが簡単に分かる．またその微分は

  $$(\log z)' = u_x + i v_x = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y/x^2}{1 + y^2/x^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z}$$

  である．$\log z$ は多価関数だがその微分は 1 価関数であることに注意せよ．

- 対数関数は指数関数の逆関数（p.58〜59 例 3，例 4）

  $e^{\log z} = z$ は常に成り立つ．$e^{2k\pi i} = 1$ なので $\log z$ は多価でも合成したものは 1 価になる．しかし $\log(e^z) = z$ は一般に成り立たない．$\log(e^z) = z + 2k\pi i$ だ．後から対数をとっているので対数関数の多価性がそのまま現れてくる．

- べきの対数関数による表示（p.60 (13)(14)）

  $$e^{n \log z} = e^{n \ln |z| + in \arg z} = e^{n \ln |z|} + e^{in \arg z} = |z|^n e^{in \arg z} = z^n$$

  である．ただし左辺は $z = 0$ では定義できない．なお，$\log z$ の多価性は指数をとることにより解消されている．

  これを n 乗根で考えてみる．

  $$e^{\frac{1}{n} \log z} = e^{\frac{1}{n} \ln |z| + i \frac{1}{n} \arg z} = e^{\frac{1}{n} \ln |z|} + e^{i \frac{1}{n} \arg z} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{1}{n} \arg z}$$

  これが z の n 乗根であることは簡単に分かる．ただし $\log z$ の多価性は

  $$\frac{1}{n} \arg z = \frac{1}{n} (\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi i) = \frac{1}{n} \mathrm{Arg}\, z + \frac{2k}{n} \pi i$$

  となるので，$k = 0, 1, \ldots (n-1)$ に応じて n 個の値が出る．$z^{1/n}$ は n 価の関数になっている．

[*1] 常用対数をよく使う分野で区別のために使われる記号だ．関数電卓でも log 常用対数，ln 自然対数という使い分けが行われる．数学では常用対数はほとんど使わないのですべて log で済ませるのが普通だ．

3. 一般のべき関数
指数関数も対数関数も正則なので，それらの合成として記述される $z^{1/n}$ も正則である．これを一般化して $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$z^c = e^{c \log z}$$

と定める．これも正則であり導関数は

$$(z^c)' = e^{c \log z} c \frac{1}{z} = c e^{c \log z} \frac{1}{e^{\log z}} = c e^{(c-1) \log z} = c z^{c-1}$$

である．
この定義によって i^{-2i} の値を計算した．$e^{-2i \log i}$ なので $\log i$ をきちんと記述すればよい．

$$\log i = \ln |i| + i \arg i = \ln 1 + i(\pi/2 + 2k\pi) = i(\pi/2 + 2k\pi)$$

4. 逆三角関数，逆双曲線関数
$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$ より $2e^{iw}$ をかけて整理すれば

$$(e^{iw})^2 - 2z e^{iw} + 1 = 0$$

を得る．これを 2 次方程式として解けば

$$e^{iw} = z + (z^2 - 1)^{1/2} = z + i(1 - z^2)^{1/2}$$

となる[*2]．ここで 1/2 乗が 2 価の関数なので e^{iw} も二つの値を持つ．この対数をとって

$$iw = \log(z + i(1 - z^2)^{1/2}) + 2k\pi i \quad w = \cos^{-1} z = -i \log(z + i(1 - z^2)^{1/2}) + 2k\pi$$

これが逆三角関数の定義式になる．なお，実数の場合と異なり標準的な主値の取り方はないので無限多価関数である．式の表示から正則であることはすぐに分かる．
以上，初等関数を複素関数の世界で定義しなおしたが，微分に関する諸性質は実の初等関数とまったく変わらない．

5. 複素関数の積分
$w(t) = u(t) + iv(t)$ の積分を解説した．定義式は実質的に 1 変数関数の通常の積分を利用している．これから p.71 の定理の (2) 式は簡単に得られる．(3) 式もテキストを読んで確認しておくこと．煩雑かもしれないが難しくはない．(4) の証明は若干の技巧を要する．これも p.71 に記述されているので読んでおくこと．

本日のレポート課題

3-31 と 3-37 を課題にした．どちらも定義式を具体的な数値であてはめる問題だ．

[*2] 講義では最後の工夫をしなかったのでテキストの表示（p.65(2) 式）と見かけが変わってしまった．