複素関数の講義メモ (10 月 27 日)

前回のレポート課題について

3-31 は対数関数の値を求める問題である．対数関数の多価性は偏角の多価性に由来するので，解は $2n\pi i$ を含んだ形で表す．なお，$\log z$ を求めるには z を極形式で表す必要がある．絶対値と偏角を考えること．

$$\log e = \log ee^{2n\pi i} = \ln e + 2n\pi i = 1 + 2n\pi i$$

$$\log i = \log 1e^{(\pi/2+2n\pi)i} = \ln 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i$$

$$\log(-1 + \sqrt{3}i) = \log 2e^{(2\pi/3+2n\pi)i} = \ln 2 + (2\pi/3 + 2n\pi)i$$

3-37 はべき関数の値を求める問題だ．$z^c = e^{c\log z}$ という定義式と対数関数の値を利用する．

$$(1+i)^i = e^{i\log(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt{2}+(\pi/4+2n\pi)i)} = e^{-(\pi/4+2n\pi)}e^{i(\ln 2)/2}$$

$$(-1)^{1/\pi} = e^{(1/\pi)\log(-1)} = e^{(1/\pi)(2n+1)\pi i} = e^{i(2n+1)}$$

解はいずれも極形式で与えた．なお，$i\ln 2 = \ln 2^i$ とした解答があったが，ln は実の自然対数なのでこのような記述は許されない．対数関数の記号の使い分けに注意せよ．

本日の講義の要点

1. 複素平面上の曲線 (4-2 節)
   ジョルダン弧，ジョルダン曲線，滑らか，区分的に滑らかという用語の意味を確認した．なお，滑らかの条件に $z'(t) \neq 0$ がつけられていることに注意せよ．曲線の長さについては 1 年次の微分積分で学習済みだ．
2. 線積分 (4-3 節)
   定義式は (2) だ．同様な式により $\int_C u dx$, $\int_C u dy$ も定義される．テキストには明示されていないので注意せよ．なお，曲線 C のパラメーターの取り換えについてテキストには記述されていないので補っておく．$t = t(s)$ により t を s に変換すれば置換積分により

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(z(t(s)))\frac{dz}{dt}\frac{dt}{ds}ds = \int_\alpha^\beta f(z(s))\frac{dz}{ds}ds$$

   ここで $\alpha < \beta$ の場合は C のパラメーターを s に取り換えたものの線積分の定義に他ならない．しかし $\alpha > \beta$ の場合は積分範囲の上下を入れ替えないと線積分の定義式にならない．これは始点と終点が入れ替わるためである．始点と終点を入れ替えないパラメーターによる曲線は元の曲線と同じ曲線とみなしやはり C で表す．入れ替える場合は元の曲線の向きを変えたものとみなし $-C$ と表す．p.76 の定理の (5) 式はそのように理解してほしい．
   講義では定理（線積分の性質）の (9) を証明した．テキストに詳しく書いているので読んでおくこと．また単位円の上で $1/z$ を積分した．

$$\int_C \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i$$

3. コーシーの積分定理
   この定理からいよいよ複素関数に対する本格的な議論に入る．コーシーの積分定理は $f'(z)$ の連続性を仮定すると u, v が C^1 級になるのでグリーンの定理が提供できる．するとコーシー・リーマンの方程式からコーシーの積分定理を簡単に導くことができる．

講義ではグリーンの定理を積分域の形状に仮定（縦線集合，1 年次の微分積分のテキスト p.163）をつけて示した．テキストにないのでここに記述しておく．

縦線集合 $D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \phi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\}$ 上で P_y を積分すると

$$\begin{aligned}\iint_D P_y(x, y)dxdy &= \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} P_y(x, y)dy = \int_a^b dx\,[P(x, y)]_{\phi(x)}^{\psi(x)} \\ &= \int_a^b P(x, \psi(x))dx - \int_a^b P(x, \phi(x))dx = -\int_C Pdx\end{aligned}$$

ここで最後の線積分では D の境界をなす閉曲線 C の向きを反時計回りに取っている．また C の左右は一般に垂直方向の線分だが，垂直な直線では x は一定なので曲線に沿って $x'(t) = 0$ であり，線積分には寄与しない．上下のグラフ部分の線積分で全体の線積分の値が求められる．

4. コーシーの積分定理の考察

D が単連結な領域 (p.84) のとき D 内の任意の閉曲線 (自己交差が有限個だとしておく) C について

$$\int_C f(z)dz = 0$$

となる．これは C を自己交差点で切り分けてからつなぎ合わせることにより，有限個のジョルダン曲線の集まりにできるからだ．講義で紹介した例は若干複雑だが，テキストの例 (p.84 図 4-7) は簡単ですぐに理解できるだろう．

単連結でない場合も，D をハサミで切り開くことによって単連結な図形にできる (テキスト p.86 図 4-9，ただし L_3 は不要)．講義では定理 5 (p.85) と引き続く (6) の等式に触れた．一般の証明というより具体的な図形の上で考察してほしい．

正則関数の閉曲線上での積分では，積分路を変形しても値が変わらない．これがコーシーの積分定理から得られる帰結であり，この講義で最も基本的な事項である．次回もこの考察をさらに深めていくのできちんと考えておいてほしい．なお，曲線や図形に関する用語は感覚的に捉えてくれれば十分だ．厳密さにはあまりこだわらないように．

本日のレポート課題

4-8 と 4-15 を課題にした．線積分の定義に従って計算してみること．