

複素関数の講義メモ (11月10日)

前回のレポート課題について

4-8 は 0 から 2 に至る二通りの曲線に沿って $z-1$ を積分する. (a) は $z(\theta) = 1 + e^{i\theta}$ なので

$$\int_C z-1 dz = \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\theta} i e^{i\theta} d\theta = i \int_{\pi}^{2\pi} e^{2i\theta} d\theta = \frac{1}{2} [e^{2i\theta}]_{\pi}^{2\pi} = 0$$

(b) は $z = x$, $0 \leq x \leq 2$ なので

$$\int_C z-1 dz = \int_0^2 (x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 = 0$$

4-15 は正則でない関数の線積分である. なおこの曲線は $y = \sqrt{1-x^2}$ より単位円の上半分になる.

$$\int_C \bar{z} dz = \int_{-1}^1 (x - i\sqrt{1-x^2}) \left(1 - i \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = -i \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -i [\sin^{-1} x]_{-1}^1 = -i\pi$$

【コメント】

- この問題を通じて線積分の計算の基本を確認してほしい.
- $e^{i\theta}$ は絶対値 1 偏角 θ の複素数だ. $e^{4\pi i} = 1$ は $\cos, \sin$ を利用せずに分かってほしい.
- 4-8(b) の曲線は実軸に含まれる. この被積分関数は実軸上では実数値関数なので, (b) の線積分は通常の積分と変わらない. これは一般に成り立つ事実である.
- (a) の曲線で進んで (b) の曲線で戻れば, 0 を始点終点とするジョルダン曲線になる. $z-1$ は全平面で (したがってこのジョルダン曲線の内部で) 正則なのでコーシーの積分定理により (a) の積分値から (b) の積分値を引いたものは 0 になる. すなわち (a) の結果と (b) の結果は等しくなる. この関係は p.78 の例 1 と例 2 でも確認できる.
- 4-15 の曲線は単位円の上半分を左から右に進む曲線だ. これを $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ と表すと向きが逆になる.
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x$ は 1 年次の数学で学んだ基本公式だ. この講義でも使うのできちんと思い出しておくこと.

本日の講義の要点

1. コーシーの積分定理から導かれること

一つは単連結でない場合への拡張 (定理 5) で p.86 の (6)(7) の式が重要だ. もう一つは単連結領域での正則関数の線積分の値が, 始点と終点で決まること (定理 4) だ. 講義ではこれらの事実がコーシーの積分定理からどのように導かれるかを解説した. 重要な結果なのできちんと覚えておくように.

2. 代数学の基本定理の証明

代数学の基本定理とは「複素数を係数とする n 次方程式は複素数の範囲で解を持つ」ことを言う. 数学のもっとも基本的な定理の一つであり, 有理関数の積分における部分分数展開の可能性の証明にも利用される. この定理の証明には多くの方法があり, そのいくつかは他の講義でも紹介されるだろう. ここではコーシーの積分定理の応用した証明法を解説した. 証明はテキスト p.88 にあるが, 整理するためステップに分ける.

- 実係数多項式について必ず解を持つことが示せたとする．多項式 $P(z)$ について $P(z)\overline{P(z)} = 0$ は実係数方程式なので解を持つ．その解を α とおけば

$$P(\alpha)\overline{P(\alpha)} = P(\alpha)\overline{P(\overline{\alpha})} = 0$$

なので， α と $\overline{\alpha}$ の少なくとも一方は $P(z) = 0$ の解になる．よって $P(z) = 0$ は解を持つ．

- $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ を実係数の n 次多項式で，すべての z について $P(z) \neq 0$ を満たすとする．
- $Q(z) = z^n P(z+z^{-1})$ とおくと，これは $2n$ 次多項式であり， $z \neq 0$ について $Q(z) \neq 0$ であり， $Q(0) = a_n \neq 0$ である．よって $z^{n-1}/Q(z)$ は全平面で正則である．
- 単位円 $C: z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 上積分すると

$$\int_C \frac{z^{n-1}}{Q(z)} dz = \int_C \frac{1}{zP(z+z^{-1})} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}P(2\cos\theta)} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} \frac{1}{P(2\cos\theta)} d\theta$$

- コーシーの積分定理によりこの積分値は 0 である．一方 $P(2\cos\theta)$ は 0 にならない実数値連続関数なので常に正または常に負である．これは矛盾である．

コーシー・グルサの定理の証明は難しいのでこの講義では扱わない．ただ上の証明を見れば証明を与えたコーシーの積分定理で十分なので代数学の基本定理の厳密な証明が与えられたことになる．

3. 原始関数と線積分

$F'(z) = f(z)$ が成り立つとき F を f の原始関数という．原始関数が存在するとき

$$\int_C f(z) dz = f(\text{終点}) - f(\text{始点})$$

である．線積分は始点終点のみの値で決まり，通る経路によらない．

単連結領域で正則な関数には原始関数が存在する．p.85 定理 4 と p.95 定理 2 を合わせればよい．(p.97 定理 4) なお，p.95 の定理 2 は極限に関して $\delta\varepsilon$ 論法を使う．この講義では極限は直感的にしか解説していないので分かりづらかったかもしれない．テキストの証明を見ておいてほしい．

4. 原始関数と積分計算の例

$m \neq -1$ を満たす整数 m について， $f(z) = z^m$ の原始関数は $\frac{1}{m+1} z^{m+1}$ である． m が負のときは単連結領域での正則関数ではないが原始関数は存在する．積分値は始点と終点で決まるし，単位円上の積分は 0 になる．

$f(z) = z^{-1}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の正則関数であるが，原始関数を持たない．ただし定義域を $\mathbb{C}$ から実軸の 0 および負の部分を除いたものに制限すれば，それは単連結であり原始関数を持つ．それが $\text{Log } z$ である．なお原始関数が一つあればそれに定数を加えたものも原始関数である．

なお C を単位円 $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とするとき

$$\int_C z^m dz = \begin{cases} 2\pi i & m = -1 \\ 0 & 0 \end{cases}$$

である． $m \leq -2$ のときは原始関数の存在による．

次回はコーシーの積分公式を扱う．ある種の線積分が，内部のある点での関数の値で記述できるという不思議な結果である．

本日のレポート課題

章末問題の 4-21 を課題にする．なおどの関数も 1 価なので，どの範囲で定義できるのかを考えること．その曲線の内部で正則関数として定義できればコーシーの積分定理で 0 になることが分かる．