複素関数の講義メモ (11 月 17 日)

前回のレポート課題について

4-21 を出題した．$f(z)$ が正則なるような範囲を求めることとコーシー・グルサの定理が適用できることを確認することが課題だが，後半は何を言えばよいのか良くわかっていない人が目立つ．コーシー・グルサの定理の内容を確認することが出発点だ．【コメント】

- 正則性を示すのは，正則な関数の和差積商と合成で表されていることをみればよい．特に微分する必要はないしコーシー・リーマンの方程式を確認する必要もない．1 変数の場合とまったく同じだ．テキストにおける初等関数の正則性についての議論の流れをまとめておく．
  - z^n は正則である（p.34 定理 1）．
  - 正則関数の和差積商・合成は正則である（p.34 定理 2，定理 3）．
    以上 2 項目は微分の定義により証明できる．議論は実関数の場合とまったく同じである．以上から有理関数は分母が 0 でない範囲において正則である．
  - e^z は正則である（p.38 例 3）．
  - $\cos z$, $\sin z$ は正則である．指数関数で定義されているので e^z の正則性が使える．
  - $\tan z$ は $\cos z \neq 0$ の範囲で正則である．（p.54）
  - $\operatorname{Log} z$ は $z \neq 0$, $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$ の範囲で正則である．（p.57 定理 1）
    テキストでは極座標によるコーシー・リーマンの方程式を利用しているが，講義では通常のコーシー・リーマンを使った．
  - 複素数べき z^c は，対数関数と指数関数を組み合わせて定義した（p.62 (1) 式）．よって正則関数の合成なので正則である．
  - 逆三角関数は対数関数とべきを使って定義した（p.64，65）．これらも正則である．
  - 以上から初等関数（多項式，べき関数，指数関数，三角関数，逆三角関数の式として表される関数）はすべて正則である．ただし，正則になる範囲は注意すること．
- $\tan z$ が定義できなくなるのは $\cos z = 0$ の場合だ．ただし，複素三角関数なので注意が必要だ．$z = \pi/2 + n\pi$ で正解だが，実関数として述べたのなら論理は間違いだ．ここはきちんと示すべきだ．なお p.53 の (15) 式を引用しても良い．

$$2\cos z = e^{iz} + e^{-iz} = e^{ix-y} + e^{-ix+y} = (e^{-y} + e^{y})\cos x + i(e^{-y} - e^{y})\sin x = 0$$

  より $\cos x = 0$ と $e^y = e^{-y}$ を得るが，これから $x = \pi/2 + n\pi$, $y = 0$ を得る．よって $z = \pi/2 + n\pi$ である．
- $\operatorname{Log} z$ は $z \neq 0$ について $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ で定義される．ただし，$-\pi < \operatorname{Arg} z \leqq \pi$ なので $\operatorname{Arg} x = \pi$ となる z では不連続である．すなわち実軸の原点より左側で不連続であり，この半直線を除いた部分で正則である．よって $\operatorname{Log}(z + 2)$ は実軸の -2 より左側の部分を除いて正則である．
- この範囲を $z + 2 < 0$ と記述する人が目につくが，複素数では不等式は意味を持たない．z は複素数なのでこの式は許されない．
- コーシー・グルサの定理を適用するためには C の周上及び内部で $f(z)$ が正則であることをみればよい．要するに前半で求めた正則でなくなる点がすべて C の外側にあることを言えばよい．前半で正則でなくなる点 (定義できない点）を求めたのだから簡単だ．
- 単に「成り立つ」と書いても何が成り立つのか分からない．

本日の講義の要点

1. コーシーの積分公式（p.100 定理 1）
ジョルダン曲線 C について $f(z)$ が C 上および C の内部で正則ならば C の内部の点 z_0 について
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$
が成り立つ．これをコーシーの積分公式という．
証明はテキスト p.101 から記述されているのでここではポイントのみ箇条書きしよう．
   - 被積分関数は $z \neq z_0$ で正則なので，積分路の変形原理（p.87 (7) 式）により z_0 を中心とする半径 r の円周 C_r（C_r は C の内部にとる）での積分と等しくなる．
   - $\frac{1}{z-z_0}$ の C_r 上での積分は $2\pi i$ なので
   $$\int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0}dz - \int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0}dz = \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz - 2\pi i f(z_0)$$
   - r を小さくしていけば C_r 上の点 z について $|f(z) - f(z_0)|$ はいくらでも小さくなるので，上の積分の左辺はいくらでも小さくなる．
2. コーシーの積分公式の拡張
コーシーの積分公式の重要な応用は p.103 の定理 2 である．定理 2 の証明もテキストを読んでほしい．
   - コーシーの積分公式を利用して
   $$\frac{f(z + \varDelta z) - f(z)}{\varDelta z} = \frac{1}{2\pi i\varDelta z}\int_C f(s)\left(\frac{1}{s - z - \varDelta z} - \frac{1}{s - z}\right)ds = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s - z - \varDelta z)(s - z)}ds$$
   - ここで $\varDelta z \to 0$ とすれば
   $$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s - z)^2}ds$$
   を得る．右辺の $\varDelta z$ を 0 にしただけだが，厳密な議論はテキスト p.104 に記述されている．
   - 同様な議論で
   $$f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s - z)^3}ds$$
   を得る．f'' が存在するので f' は正則である．f が正則ならその導関数も正則であるという事実が示せたので，これを繰り返し使えば f は何回でも微分でき，$f^{(n)}$ は正則であることが示される．
   - 正則関数は無限回微分可能であり，その n 次導関数はコーシーの積分公式の拡張（p.105 (7) 式）で記述できる．
   $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s - z)^{n+1}}ds$$
3. コーシーの積分定理の積分計算への応用
例 1（p.101）と例 3（p.106）を解説した．いずれも被積分関数は C の内部に唯一つの正則でなくなる点を持つ．そこでその点を z_0 と見立ててコーシーの積分公式を利用する．難しいことではないので，きちんと考えてみること．
4. モレラの定理
連続関数 $f(z)$ について，任意のジョルダン曲線上で線積分の値が 0 であれば $f(z)$ は正則である．これをモレラの定理と呼ぶ．

- ジョルダン曲線上での線積分が 0 であることから，線積分の値は始点と終点で決まる．（p.85 定理 4 と同じ議論）
- これから $f(z)$ は原始関数 $F(z)$ を持つ．（p.96 定理 3）
- 原始関数は $F'(z) = f(z)$ を満たすので正則である．よって $F'(z) = f(z)$ も正則である．

5. 時間が若干余ったのでべき級数の収束半径を解説した．テキストには書いてないので補足しておこう．

   命題 べき級数 $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ について，$|z_0| < |z_1|$ とする．このとき，$S(z_1)$ が収束すれば $S(z_0)$ も収束する．また $S(z_0)$ が発散すれば $S(z_1)$ も発散する．

   証明には極限についての次の基本的事実を使う．実数と論理など他の授業で証明を扱うはずだ．なお実数の場合も複素数の場合も以下の事実についてはまったく変わらない．

   - $\sum a_n$ が収束すれば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．
   - 収束する数列は有界である．すなわち $|a_n| \leqq M$ が常に成り立つような正数 M が存在する．
   - $\sum |a_n|$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束する．これを絶対収束するという．

   証明 $\sum a_n {z_1}^n$ が収束すれば $\{a_n {z_1}^n\}$ は 0 に収束する．ゆえに $|a_n {z_1}^n| \leqq M$ となるような $M > 0$ が存在する．$r = |z_0|/|z_1| < 1$ とおけば

   $$|a_n {z_0}^n| \leqq M \left|\frac{z_0}{z_1}\right|^n = Mr^n$$

   なので $\sum |a_n {z_0}^n|$ は収束する．ゆえに $\sum a_n {z_0}^n$ も収束する．

   この命題によりべき級数はある半径の円板内で収束し，その外部で発散する．この半径を収束半径と呼ぶ．この説明は若干大雑把な説明になり過ぎたかもしれない．級数については次回から本格的に扱うことにしよう．

今回で前半の話題は終了した．12 月 1 日に今回までの範囲で第 1 回の試験を行うので勉強しておくこと．

本日のレポート課題

演習問題 4-34 の (b) と (c)，および 4-36 を出題する．C の内部で常に正則ならコーシーの積分定理，正則でない点が 1 つあればコーシーの積分公式を使う．