複素関数の講義メモ (11 月 24 日)

前回のレポート課題について

4-34 の (b)(c) および 4-36 を出題した．いずれもコーシーの微積分公式を利用してジョルダン曲線上の線積分を計算する問題である．計算方法を覚えておくことは当然だが，この公式が成立する理由も理解するようにしておくこと．

4-34(b)　被積分関数の特異点（正則でなくなる点）は $\pm 2i$ だ．このうち C 内のあるのは $2i$ なので $f(z) = \dfrac{1}{(z+2i)^3}$，$z_0 = 2i$ としてコーシーの微積分公式を利用する．

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)^3} = \int_C \frac{f(z)}{(z-2i)^3} dz = \pi i f''(2i)$$

$f''(z) = (-3)(-4)(z+2i)^{-5}$ より

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)^3} = 12\pi i \frac{1}{(4i)^5} = \frac{3\pi}{256}$$

4-34(c)　被積分関数の特異点は 0 のみでありそれは C の内部にある．$f(z) = \sin z e^{-z}$, $z_0 = 0$ とみてコーシーの微積分公式を適用する．

$$\int_C \frac{\sin z}{e^z z^2} dz = \int_C \frac{f(z)}{z^2} dz = 2\pi i f'(0)$$

$f'(z) = \cos z e^{-z} - \sin z e^{-z}$ より $f'(0) = 1$ なので

$$\int_C \frac{\sin z}{e^z z^2} dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i$$

4-36　z が C の内部にあるときはコーシーの微積分公式により

$$\int_C \frac{s^3+2s}{(s-z)^3} ds = \frac{2\pi i}{2} f''(z) = 6\pi i z$$

z が C の外部にあるときはコーシーの積分定理により 0 である．

本日の講義の要点

1. べき級数（p.119）

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

が $D : |z-z_0| < R$ で収束するとする．このとき $S(z)$ は D 上連続な関数になる（定理 4）．なおこの定理の証明は N を z によらずにとる必要があるがその点についての言及がない．講義では若干記述を変更して証明を与えた．

定理 $S(z_1)$ が収束するとする．$R = |z_1 - z_0|$ とおくとき $S(z)$ は $D : |z-z_0| < R$ 上の連続関数を定める．

証明 $z_0 = 0$ として証明すれば十分である．このとき $|z_1| = R$ である．まず 無限級数 $S(z_1)$ が収束するので $\lim a_n {z_1}^n = 0$ であり，$|a_n {z_1}^n| = |a_n| R^n \leqq M$ となる正数 M が存在する．よって $|z| < |z_1|$ を満たす z について $|z|/|z_1| = r < 1$ とおいて

$$|a_n z^n| \leqq |a_n||z_1|^n \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leqq M r^n$$

であり $\sum Mr^n$ が収束することから $S(z)=\sum a_n z^n$ は収束する．

$r<1$ をとり $D_r:|z|<rR$ とおく．$z\in D_r$ について

$$S(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n z^n+\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n = S_N(z)+\rho_N(z)$$

とおく．

$$|\rho_N(z)| \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n z^n| \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n R^n \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty} Mr^n = Mr^{N+1}\frac{1}{1-r}$$

なので任意の $\varepsilon>0$ について N を $Mr^{N+1}\frac{1}{1-r}<\varepsilon$ となるようにとれば，$z,w\in D_r$ について

$$|S(z)-S(w)| \leqq |S_N(z)-S_N(w)|+|\rho_N(z)|+|\rho_N(w)| < |S_N(z)-S_N(w)|+2\varepsilon$$

$S_N(z)$ は多項式であり連続なので z を w に近づけていけば $|S_N(z)-S_N(w)|<\varepsilon$ とできる．ゆえに $|S(z)-S(w)|<3\varepsilon$ となり $S(z)$ は w で連続である．

以上から $S(z)$ は D_r 上の連続関数になる．$z\in D$ は $|z|<R$ であり $r=(R+|z|)/(2R)<1$ について $z\in D_r$ になる．よって $S(z)$ は収束し z において連続である．

2. テイラー展開

テイラー展開は 1 年次の微分積分で学習した．ここではコーシーの微積分公式を使って正則関数の場合に証明した．

- $D:|z-z_0|<R$ について $f(z)$ は D の閉包 $\overline{D}:|z-z_0|\leqq R$ を含む開集合で正則とし，C を円周 $|z-z_0|=R$ を正の向きに 1 周するジョルダン曲線とする．コーシーの積分公式により $z\in D$ について次が成り立つ．

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s-z}ds$$

- 等比級数の和

$$1+\frac{z}{s}+\left(\frac{z}{s}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z}{s}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{z}{s}\right)^{n+1}}{1-\frac{z}{s}}=\frac{s}{s-z}-\frac{z^{n+1}}{s^n(s-z)}$$

より

$$\frac{f(s)}{s-z}=\frac{f(s)}{s}+\frac{f(s)}{s^2}z+\cdots+\frac{f(s)}{s^{n+1}}z^n+\frac{f(s)}{s^{n+1}(s-z)}z^{n+1}$$

- この式の両辺に $2\pi i$ をかけ，C で線積分すればコーシーの微積分公式より

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\cdots+\frac{f^n(0)}{n!}z^n+2\pi i\int_C \frac{f(s)}{s^{n+1}(s-z)}dsz^{n+1}$$

- $s\in C$ より $|s|=R,\ |s-z|\geqq R-|z|$ である．また C 上での $|f(z)|$ の最大値を M とおけば

$$\left|\int_C \frac{f(s)}{s^{n+1}(s-z)}dsz^{n+1}\right| \leqq \int_C \frac{M}{r^{n+1}(r-|z|)}|dz||z|^{n+1}=2\pi r\frac{M}{r-|z|}\left(\frac{|z|}{r}\right)^{n+1}$$

となる．これは各 z について $n\to\infty$ で 0 に収束する．

実関数の場合のテイラー展開は，テイラーの定理を証明し，その剰余項が 0 に収束することによってテイラー展開を示すことができた．正則関数の場合は $f(z)$ が正則になる領域を考えればどの範囲で収束するか簡単に決定できる．この事情は例で見てほしい．

3. テイラー展開の例

- $f(z) = e^z$ は $f^{(n)}(z) = e^z$ なので $f^{(n)}(0) = 1$ である．よって

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

  $f(z) = e^z$ は全平面で正則なのでこの等式はすべての $z \in \mathbb{C}$ で成立する．

- $f(z) = \mathrm{Log}\,(1+z)$ は $n \geqq 1$ について $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+z)^{-n}$ である．

$$\mathrm{Log}\,(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

  $f(z) = \mathrm{Log}\,(1+z)$ が正則でない点は実軸の -1 より左側なので $|z| < 1$ では正則であり，この級数は $|z| < 1$ で収束する．

- $f(z) = \cos z$ の $z = \pi/2$ におけるテイラー展開を求めるには $f^{(n)}(\pi/2)$ を求めればよい．$f^{(2k)}(z) = (-1)^k \cos z$, $f^{(2k+1)}(z) = (-1)^{k+1} \sin z$ なので $f^{(2k)}(\pi/2) = 0$, $f^{(2k+1)}(\pi/2) = (-1)^{k+1}$ より

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} (z - \pi/2)^{2k+1}$$

  これもすべての z で収束する．

- 一般に関数をべき級数として表示できればそれはテイラー展開である（後ほど証明する）．このことを利用してテイラー展開を求めることができる．

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

  左辺は $|z| < 1$ で正則なので，この等式は $|z| < 1$ で成立する．

4. べき級数の収束性について

講義で証明せずに使ったことを補足しておく．

- 無限級数 $\sum a_n$ が収束するとは部分和の数列 $\{S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ が収束することを言う．
- 数列 $\{S_n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \text{s.t.} \quad n, m \geqq N \Longrightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon$$

  が成り立つことである．これをコーシーの収束判定条件という．

- 無限級数 $\sum a_n$ が収束するための必要十分条件は

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \text{s.t.} \quad n > m \geqq N \Longrightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots a_n| < \varepsilon$$

- 無限級数 $\sum |a_n|$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束する．これを絶対収束するという．これは次の三角不等式と上の無限級数に対するコーシーの収束判定条件を組み合わせればよい．

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| \leqq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n|$$

- 各項が正数の級数 $\sum a_n$ と $\sum b_n$ について $a_n \leqq b_n$ が成り立つとき，$\sum b_n$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束する．なぜなら $a_n \geqq 0$ より部分和の数列 $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ は単調増加になること，また

$$S_n \leqq b_0 + b_1 + \cdots + b_n \leqq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

  より上に有界になることから示される．

- 以上を組み合わせれば無限級数 $\sum a_n$ について，$|a_n| \leqq b_n$ で $\sum b_n$ が収束するものがとれれば $\sum |a_n|$ は収束するので $\sum a_n$ も収束する．

本日のレポート課題

演習問題 5-10 と 5-11 を課題にする．なお来週は試験なので締め切りは来週の金曜日（12 月 4 日）の 13 時とする．なおヒントを与えておく．

- 5-10(a) については $\cosh z$ の n 次導関数を求める必要がある．なお，p.54 の (22) 式を見れば結果は簡単だ．
- 5-11 についてはべき級数の形を見れば (a) は -1 でのテイラー展開，(b) は 2 でのテイラー展開である．ゆえに $f(z) = 1/z^2$ について $f^{(n)}(z)$ を求め，$f^{(n)}(-1)$, $f^{(n)}(2)$ を求めればよい．なお収束域の考察も行うこと．