複素関数の講義メモ (12 月 15 日)

前回のレポート課題について

5-12 および 5-13 を出題した．いずれも無限等比級数の和の公式を使えば簡単に求められるが，それがローラン展開であることは展開の一意性を示して初めて分かることだ．前回の講義ではテイラー展開の一意性は示したがローラン展開については話していない．

この問題の解答では無限等比級数を利用しても問題はないが，このような論理的な問題は認識しておいてほしい．ここではローランの定理における係数の積分による表示と，コーシーの微積分公式を利用した解答例を記述しておく．

5-12 円環領域 $0 < |z| < 4$ におけるローラン展開なので，係数は $C : |z| = 1$ として

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z^{n+2}}\frac{1}{4-z}dz$$

で求められる（p.128(5) 式）．$n \geqq -1$ のときは右辺に $g(z) = (4-z)^{-1}$ に関するコーシーの微積分公式を利用して

$$c_n = \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(0) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(n+1)!(4-z)^{-n-2}\right]_{z=0} = \frac{1}{4^{n+2}}$$

を得る．$n < -1$ のときは被積分関数が $z = 0$ でも正則になるのでコーシーの積分定理により $c_n = 0$ である．

$$\frac{1}{4z - z^2} = \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{4^{n+2}}z^n$$

【コメント】被積分関数は $0, 4$ 以外では正則なので，$0 < |z| < 4$ の内部で正則なことは直ぐにわかる．これからこの円環領域においてローラン展開ができることは一般論として証明済みである．なおローラン展開の係数の表示における積分の積分路 C は円環領域の内部に取る必要がある．

5-13 この問題では $1 < |z| < \infty$ でのローラン展開なので $C : |z| = 2$ とでも取ればよい．

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z^{n+1}}\frac{1}{1+z}dz$$

$n \leqq -1$ のときは C 内の特異点（正則でない点）は -1 のみなのでコーシーの積分公式により

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{-n-1}}{z+1}dz = \left[z^{-n-1}\right]_{z=-1} = (-1)^{n+1}$$

$n \geqq 0$ のときは，特異点は $0, -1$ の 2 つあるので $C_0 : |z| = 1/4,\ C_1 : |z+1| = 1/4$ ととって（多重連結な場合のコーシー・グルザの定理（p.87(6)））

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{1}{z^{n+1}}\frac{1}{1+z}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{1}{z^{n+1}}\frac{1}{1+z}dz$$

となる．第 2 項の値は前と同じで $(-1)^{n+1}$ である．第 1 項の積分は，コーシーの微積分公式を利用する．$((1+z)^{-1})^{(n)} = (-1)^n n!(1+z)^{-n-1}$ なので

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{1}{z^{n+1}}\frac{1}{1+z}dz = \frac{1}{n!}(-1)^n n! = (-1)^n$$

となるので 2 つの項の和は 0 である．

本日の講義の要点

1. ローラン展開の一意性

ローラン級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} b_m(z-z_0)^{-m}$ が $R_0 < |z| < R_1$ で収束するとは，第 1 項が $|z| < R_1$ で，第 2 項が $1/|z| < 1/R_0$ で収束することに他ならない．この級数についても p.132 の補助定理が成り立つ．この事実を使えば，テイラー展開の一意性の証明と同様な議論でローラン展開の一意性が証明できる．

2. べき級数の積

2 つのテイラー級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ がともに $|z| < R$ で収束するとする．$f(z)$, $g(z)$ はともに開円板 $|z| < R$ 上の正則関数なので $f(z)g(z)$ も $|z| < R$ でテイラー展開できる．ライプニッツの公式[*1]

$$(fg)^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z)$$

より

$$\frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

なので

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

が成り立つ．この式はべき級数の積を多項式の積のように求めて構わないことを表している．さらに収束性についても保証されているので安心して使うことができる．これを応用して関数の展開の最初の数項を求めることができる．例えば

例　$f(z) = \tan z$ としよう．分母の $\cos z$ が 0 になるのは $z = \pi/2 + n\pi$ なので $|z| < \pi/2$ で正則である．よって $|z| < \pi/2$ で収束するべき級数 $\sum c_n z^n$ に展開できる．$\sin z = \tan z \cos z$ をべき級数で書けば

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\right)$$

となるが，右辺を展開して左辺の係数と比較することにより

$$c_0 = 0 \quad c_1 = 1 \quad c_2 - \frac{c_0}{2} = 0 \quad c_3 - \frac{c_1}{2} = -\frac{1}{6} \quad c_4 - \frac{c_2}{2} + \frac{c_0}{24} = 0 \quad c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24} = \frac{1}{120}$$

となるので

$$c_0 = 0 \quad c_1 = 1 \quad c_2 = 0 \quad c_3 = \frac{1}{3} \quad c_4 = 0 \quad c_5 = \frac{2}{15}$$

を得る．すなわち

$$\tan z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \cdots$$

である．なお，奇数べきの項しか現れないことを使うともっと簡単に求められる．

3. 正則関数の零点

正則関数 $f(z)$ について $f(z_0) = 0$ のとき z_0 を $f(z)$ の零点という．$f(z)$ を z_0 の近傍でテイラー展開

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

[*1] 1 年次のテキストには記述されていないが本来は 1 年次の微分積分で扱うべき公式である．証明は 2 項定理の証明と同様に数学的帰納法による．

すれば $a_0 = 0$ である．ここで $a_m \neq 0$ となる最小の整数 m を零点の位数，z_0 を m 位の零点と呼ぶ．このとき

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m}(z - z_0)^k = (z - z_0)^m g(z)$$

とおけば $g(z)$ は $g(z_0) = a_m \neq 0$ を満たす正則関数である．これから $f(z)$ の零点は孤立していることが分かる．

4. 孤立特異点と留数，留数定理

$f(z)$ が $0 < |z - z_0| < R$ で正則なとき z_0 を孤立特異点という．$f(z_0$ は必ずしも定義されている必要はない．この時ローランの定理により

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \qquad 0 < |z| < R$$

と展開できる．この展開の $(z - z_0)^{-1}$ の係数 c_{-1} を $f(z)$ の孤立特異点 z_0 における留数という．

留数に関して留数定理（p.151）が成り立つ．定理の主張についてはテキストを確認すること．この証明を簡単にまとめておく．

- 各特異点 z_j を中心とする円周 C_j を C_j の内部が C の内部に含まれ，かつ互いに重ならないように取る．p.87 の (6) 式により

$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)dz$$

- C_j での積分を $0 < |z - z_j| < r$ でのローラン展開を利用して計算する．

$$\int_{C_j} f(z)dz = \int_{C_j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_j)^k dz$$

- p.132 の補助定理（項別積分）を利用して

$$\int_{C_j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_j)^k dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{C_j} (z - z_j)^k dz$$

- $k \neq -1$ のときは $(z - z_j)^k$ は C_j 上で正則な原始関数 $\frac{1}{k+1}(z - z_j)^{k+1}$ を持つので積分の値は 0 である．これは原始関数を持つ関数の線積分が原始関数の終点での値と始点での値の差で与えられること（p.93 定理 1），および C_j はジョルダン曲線なので始点と終点が一致することによる．
- $k = -1$ のときは C_j を $z = z_j + re^{it}$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$ と表示して

$$\int_{C_j} \frac{1}{z - z_j} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

  以上を組み合わせて

$$\int_{C_j} f(z)dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i R(z_j)$$

  ただし $R(z_j)$ は $f(z)$ の z_j における留数である．

今回で今年の授業は終了した．次回は年明けの 1 月 12 日である．今回のレポート課題は出さないが，今まで授業で扱った内容をじっくり復習しておいてほしい．特にコーシーの積分定理，コーシーの積分公式，コーシーの微積分公式，テイラー展開，ローラン展開，留数定理にいたる系譜は証明の概略も含めて理解しておくように．