複素関数の講義メモ (12 月 8 日)

前回のレポート課題について

5-10 および 5-11 を出題した．

5-10(a)　$(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$ より n が奇数の時は $f^{(n)}(z) = \sinh z$，偶数の時は $f^{(n)}(z) = \cosh z$ である．$\sinh 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$ より

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!}$$

【コメント】テキストの解答に n が奇数の時 $f^{(n)}(z) = 0$ と記述されていた．高校の教科書は基本的に誤植はないが大学の教科書では良くあることだ．教科書に書いてあるからと言って鵜呑みにしてはいけない．そもそも $f^{(n)}(z) = 0$ ならそれ以上何回微分しても 0 にしかならない．定数関数なのだから当たり前だ．教科書に問題があるのではなく，鵜呑みにした自分の理解度が足りないと認識すること．

なお，双曲線関数は分からないからテキストの解答をそのまま使ったのかもしれない．しかし，分からなければ調べればよい．英語で分からない単語が出てくれば辞書で調べるはずだ．なぜ数学でそれをやらないのか．記号や概念の意味を知らなければ数学が分かるはずがない．

5-10(b)　$\cosh z = \cos(iz)$ より

$$\cosh z = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(iz)^{2m}}{(2m)!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m i^{2m} \frac{z^{2m}}{(2m)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!}$$

【コメント】$\cos z$ のテイラー展開は 1 年次で学習したはずだ．これはそのまま使ってよい．

5-11　$f(z) = z^{-2}$ について $f^{(n)}(z) = (n+1)!(-1)^n z^{-n-2}$ である．(a) は $f^{(n)}(-1) = (n+1)!$ より

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!} (z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$$

(b) は $f^{(n)}(2) = (n+1)!(-1)^n 2^{-n-2}$ より

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n \frac{1}{2^{n+2}} (z-2)^n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2} \right)^n$$

である．なお，左辺は 0 以外で正則なので，$|z+1| < 1$ で正則である．よって (a) の級数は $|z+1| < 1$ で収束する．2 を中心とした場合は $|z-2| < 2$ で正則なので (b) の級数は $|z-2| < 2$ で収束する．

【コメント】一般に z^α の n 次導関数はきちんと求められるようにしておくこと．1 年次の微分積分でも学習したと思う．級数の収束半径について考察のない答案が目立ったがこれでは肝心なことが落ちてしまう．p.120 のテイラーの定理は半径 R の円の内部で正則なら，その範囲でテイラー展開できることを主張している．この定理の意味と解答を比較して考えてほしい．

本日の講義の要点

1. ローラン展開

p.127 のローランの定理は円環領域 $0 \leqq R_0 < |z - z_0| < R_1 \leqq \infty$ で正則な関数 $f(z)$ について

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

が成り立つことを保証する．ただし C は円周 $|z-z_0|=r,\ R_1<r<R_2$ を正の向きに 1 周するジョルダン曲線である．テキストの p.128 の (4)(5) の表示だが，応用上は境界である 2 つの円周 $|z-z_0|=R_0, R_1$ 上での正則性は仮定しないほうが良い．ローランの定理について二つ注意した．

- c_n を $|z|=r$ 上での線積分により定めているが，この値は r に依存しない．積分路の変形原理（p.87）を確認すること．
- ローランの定理の特殊な場合としてテイラーの定理を示せる．$n \leqq -1$ について $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ も正則なので，コーシーの積分定理により $c_{-n}=0,\ n\in\mathbb{N}$ である．また $n \geqq 0$ について，コーシーの微積分公式により

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

  負べきの項はなく，正べきの係数は $f^{(n)}(z_0)$ で表されるのでテイラーの定理の表示に他ならない．

2. ローラン展開の例

   テキストの p.129 の例 2 と例 3 をコメントした．なおこの例での展開は係数を積分で求めたわけではない．その意味で定理を使ってはいない．次節で正則関数が $\sum c_n(z-z_0)^n$ の形に展開できれば，それはテイラー展開（ローラン展開）になることを示すが，この事実を先取りして使ったことになる．

3. ローランの定理の証明

   $z_0=0$ として証明した．一般の場合は $g(z)=f(z+z_0)$ と置けばよい．z を円環領域内の点とし $R_0<r_0<|z|<r_1<R_1$ を満たすように r_0, r_1 をとる．この r_0, r_1 についてテキストのローランの定理の仮定が満たされていることに注意せよ．あとはテキストの証明と同一の証明を与えたのでここでは省略する．なお $z_0=0$ としているので

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s^{n+1}}ds$$

   が定理の表示であることに注意すること．

4. べき級数による関数

   べき級数で表される関数 $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を考える．べき級について $|z|<R$ で収束するような最大の R を収束半径と呼ぶ．収束半径については，p.131 のような公式があるがここでは深入りしない．数学コースに進学する学生は解析概論 I で紹介されるはずだ．

   一般に極限をとることと積分することの順序は交換できない．すなわち $\lim\int_C f_n(z)dz \neq \int_C \lim f_n(z)dz$ となる場合がある．ただし極限がべき級数の場合（部分和の定める関数列の極限の場合）は交換できる．テキストではこれを補助定理としてまとめているが，その証明には若干問題がある．この講義では補助定理は証明なしに用いることにする．補助定理の応用として

   - べき級数で定義される関数の正則性

     $g(z)=1$ として補助定理を使えば $\int_C S(z)dz=0$ が得られる．任意のジョルダン曲線上での線積分が 0 なので $S(z)$ は正則である（モレラの定理）．
   - べき級数で定義される関数の微分が項別微分で求められること

     $g(z)=\frac{1}{2\pi i(s-z)^2}$ として補助定理を用いる．あとはコーシーの微積分公式を用いる．
   - 項別微分を何度も繰り返すことにより

$$S^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)z^{n-k} \qquad S^{(k)}(0)=k!a_k$$

     を得る，ゆえに $S(z)$ のテイラー展開が $\sum a_n z^n$ であることを述べている．

本日のレポート課題

演習問題 5-12 と 5-13 を課題にする．5-12 は C を単位円として

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

をコーシーの微積分公式を利用して計算してみよ．もっと簡単にやるには

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z}\frac{1}{1-(z/4)}$$

として無限等比級数の和の公式を利用するとよい．二つの方法で求めてみるとちょうどいい練習問題だ．

5-13 は $1/z$ の級数にするのがポイントだ．公比 $-1/z$ の無限等比級数を考えてみるとよい．