「複素関数」第 1 回試験（12 月 1 日実施）解答例とコメント

問 1 から問 6 まで各 10 点，問 7 は (1)(2) のそれぞれに 10 点配点し 80 点満点で採点した．受験者は 72 人で，最高点は 75 点 (2 人)，最低点は 0 点 (2 人)，平均点は 36.25 点だった．きちんと日頃から勉強していれば 30 点は取れる問題である．合格点は 25 点とし，それに満たない 21 人を不合格とする．なお，もう 1 回試験を行うが両方とも不合格になった場合は再試験の対象としないので，不合格だった人は授業に向き合う姿勢を根本から改めるようにしてほしい．特に問 1 と問 2 はこの授業の論理的背景にかかわる問題だ．解答例を読んできちんと理解するようにしておくこと．問 7 の計算だけはできたという人もいるが，計算だけでは合格点には達しない．日頃から数学の論理をきちんと考える習慣を身に着けること．

問 1 複素関数 $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ が $z = c = a+bi$ で微分可能，すなわち $\mathit{\Delta} z = \mathit{\Delta} x + i\mathit{\Delta} y \to 0$ のとき $\dfrac{f(c+\mathit{\Delta} z) - f(c)}{\mathit{\Delta} z}$ が収束するとする．このとき u, v は $(x,y) = (a,b)$ で偏微分可能で $u_x(a,b) = v_y(a,b)$, $u_y(a,b) = -v_x(a,b)$ が成り立つことを示せ．（ヒント；$\mathit{\Delta} z \to 0$ で収束するので $(\mathit{\Delta} x, 0) \to (0,0)$ でも当然同じ値に収束する．）

【解答例】 $\mathit{\Delta} y = 0$ とおき $\mathit{\Delta} x \to 0$ とすれば

$$\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{f(c+\mathit{\Delta} x)-f(c)}{\mathit{\Delta} x} = \lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{u(a+\mathit{\Delta} x,b)-u(a,b)}{\mathit{\Delta} x} + i\frac{v(a+\mathit{\Delta} x,b)-v(a,b)}{\mathit{\Delta} x}$$

となるが，左辺は $f'(c)$ に収束するので，右辺も収束する．これは u, v が (a,b) で x について偏微分可能で $f'(c) = u_x(a,b) + iv_x(a,b)$ が成り立つことを意味する．
$\mathit{\Delta} x = 0$ として $\mathit{\Delta} y \to 0$ とすれば

$$\lim_{\mathit{\Delta} y\to 0}\frac{f(c+i\mathit{\Delta} y)-f(c)}{i\mathit{\Delta} y} = \lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{u(a,b+\mathit{\Delta} y)-u(a,b)}{i\mathit{\Delta} y} + i\frac{v(a,b+\mathit{\Delta} y)-v(a,b)}{i\mathit{\Delta} y}$$

となるが，同様に u, v は (a,b) で y について偏微分可能で $f'(c) = v_y(a,b) - iu_y(a,b)$ が成り立つ．ゆえに $u_x(a,b) = v_y(a,b)$, $u_y(a,b) = -v_x(a,b)$ である．
【コメント】

- 微分可能性からコーシー・リーマンの方程式を導く問題だ．（複素関数での）微分の定義と偏微分の定義を利用する．基本的な議論でありきちんと理解しておくこと．
- 極限の記号を書かない人がいるが極限の中身と極限値は異なる概念であり等しくはない．記号の扱いにはもう少し神経を使うこと．
- 問題では $c = a+ib$ での微分可能性しか仮定していないので これを x, y と書いてはいけない．ただしこの部分は減点していない．

問 2 ジョルダン曲線 C の周上および内部で正則な関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ について，$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = 0$ となることを示せ．ただし u, v は C^1 級であるとし，グリーンの定理 $\int_C Pdx+Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy$ は既知の公式として用いて良い．

【解答例】線積分を実部と虚部に分けて

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

これにグリーンの定理を適用すれば

$$\int_C f(z)dz = \iint_D (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_D (u_x - v_y)dxdy$$

となるが，これはコーシー・リーマンの方程式により 0 になる．
【コメント】

- グリーンの定理をとコーシー・リーマンの方程式を使う問題だ．コーシー・リーマンの方程式は問 1 で示しているので 2 つの問いでこの講義の最も基本的な部分を理解してほしい．結果を覚えるだけでは何にもならない．
- $f(z)dz$ の展開をきちんとできない人，グリーンの定理を正確に利用できない人は何故できなかったのかきちんと考えておくこと．コーシー・リーマンの方程式に思いが至らない人が散見するが，基本事項なので勉強不足としか言いようがない．

問 3 複素数に関する対数関数 $\log z$ と $\mathrm{Log}\, z$ の定義を述べよ．また $\mathrm{Log}\,(zw) = \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w$ について正しければ証明し，間違いであれば反例を与えよ．

【解答例】$\log z =\in |z|+i\arg z$ である．ここで偏角をその主値にとったものが $\mathrm{Log}\, z = \ln|z|+i\mathrm{Arg}\,(z)$ である．偏角の主値とは $-\pi < \mathrm{Arg}\,(z) \leqq \pi$ の範囲にとった z の偏角である．$z = w = -1+i$ とおけば $\mathrm{Arg}\,(z) = \mathrm{Arg}\,(w) = 3\pi/4$ だが，$zw = -2i$ の偏角は $\mathrm{Arg}\,(zw) = -\pi/2 \neq \mathrm{Arg}\,(z) + \mathrm{Arg}\,(w) = 3\pi/2$ である．よって

$$\mathrm{Log}\,(zw) = \ln 2 - i\frac{\pi}{2} \neq \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w = \ln 2 + i\frac{3\pi}{2}$$

【コメント】

- 対数関数の定義はきちんと理解しておくこと．偏角の前の i を落とす人が見受けられるがこのような間違いは繰り返さないこと．
- 偏角の主値の範囲は $-\pi < \mathrm{Arg}\, z \leqq \pi$ だ．主値の取り方は一通りではないがこの講義ではこの方法で統一している．なお，$-\pi < \mathrm{Arg}\, z < \pi$ としてしまうと $\mathrm{Arg}\,(-1)$ が定義できなくなる．また両方とも $\leqq$ にしてしまうと $\mathrm{Arg}\,(-1)$ が定まらなくなる．どちらも主値の取り方としては不適切である．
- 反例は具体的に与えるのが基本である．$\mathrm{Arg}\, z = 2/3\pi$, $\mathrm{Arg}\, w = 3/4\pi$ とすれば確かに反例になるが $z = -\sqrt{3} + i$, $w = -1 + i$ のように具体的に与えたほうが良い．
- 偏角が $\pi/2$ であることを $z = \pi/2$ と書く人がいるが，これでは z は正数（偏角 0）だ．繰り返しになるが，数式にはもう少し神経を使うこと．

問 4 $f(z) = f(x + iy) = |z|^2 = x^2 + y^2$ について正則か否か理由をつけて答えよ．

【解答例 1】 $u = x^2 + y^2$, $v = 0$ より $u_x = 2x$, $u_y = 2y$, $v_x = 0$, $v_y = 0$ だが $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つのは $(0, 0)$ のみである．正則とはその近傍で微分可能になっていることなので $(0, 0)$ も含めてすべての点で正則にはならない．
【解答例 2】 微分可能とは次が収束することである．

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - x^2 - y^2}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta x + i\Delta y}$$

$\Delta y = 0$ として極限をとれば $2x$ に収束する．$\Delta x = 0$ として極限をとれば $-i2y$ に収束する．よって $(x, y) \neq (0, 0)$ のときはこの極限は収束せず微分可能ではない．よって $(0, 0)$ も含め $\mathbb{C}$ 上で正則ではない．

【コメント】

- $z = c$ で正則とは $z = c$ の近傍で微分可能ということである．この問題では $z = 0$ で微分可能だが，$z = 0$ で正則と言ってはいけない．
- この関数が正則でないことは講義でも注意した．複素関数としての微分可能性と，2 変数関数としての微分可能性の違いを認識するための基本的例である．正則と答えた人はこの解答例をよく読んで正則でないことを理解してほしい．
- 絶対値の処理がきちんとできない人が目につく．$|z|^2 = |x^2 + 2ixy - y^2|$ としても間違いではないが分かりづらくしている．$|z|^2 = x^2 + y^2$ は常識だろう．

問 5 $(1 + i)^{2i}$ の値を求めよ．

【解答例】 $z^w = e^{w \log z}$ より

$$2i \log(1 + i) = 2i(\ln \sqrt{2} + i(\pi/4 + 2n\pi)) = -(1/2 + 4n)\pi + i \ln 2$$

$$(1 + i)^{2i} = e^{-(1/2+4n)\pi}(\cos \ln 2 + i \sin \ln 2)$$

【コメント】

- 複素数は $a + bi$ または $re^{i\theta} = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ の形に表すべきだ．$2^i e^{-(1/2+4n)\pi}$ では値を求めたとは言えない．
- $4n$ と書くべきところを $2n$ とする答案があった．これは $\arg z = \alpha + 2n\pi$ のとき $\arg z^2 = 2 \arg z = 2\alpha + 4n\pi$ としてはいけないと注意したことを覚えていたためだろう．偏角が等しいという主張は常に 2π の整数倍の差は無視したうえで等しいと言っているからだ．しかし，ここで扱っている式は複素数の等式であって偏角の等式ではない．注意してほしい．
- $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ は正しい．ただしべきの多価性は偏角の多価性に由来するので，これでは求める値を正確に求められない．

問 6 曲線 $C(t) = \cosh t + it,\ 0 \leqq t \leqq 1$ について $\int_C dz$ および $\int_C |dz|$ を求めよ．

【解答例】

$$\int_C dz = \int_0^1 \frac{dC}{dt} dt = \int_0^1 \sinh t + i dt = [\cosh t + it]_0^1 = \cosh 1 + i - 1$$

$$\int_C |dz| = \int_0^1 \left|\frac{dC}{dt}\right| dt = \int_0^1 \sqrt{\sinh^2 t + 1} dt = \int_0^1 \cosh t dt = \sinh 1$$

【コメント】

- 双曲線関数の定義は $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ だ．この z を iz にする人がいたがそれは三角関数の定義だ．双曲線関数と三角関数はよく似た性質があるのできちんと見ておいてほしい．

- 前半は 1 の積分なので正則関数の積分であり原始関数 z の終点から始点での値を引けばよい．

$$\int_C dz = \int_{C(0)}^{C(1)} dz = [z]_{C(0)}^{C(1)} = C(1) - C(0) = \cosh 1 + i - \cosh 0$$

- 後半の積分は C の長さを求めることに他ならない．$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ なので $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ だ．

$$\int_C |dz| = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

だがこれが 1 年次に学習した曲線の長さの求め方に他ならないことに注意せよ．

問 7 コーシーの微積分公式を利用して以下の積分の値を求めよ．ただし積分路の円周は反時計回りの向きにとる．

$$(1) \int_C \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^3} dz, \quad C : |z| = 2 \qquad (2) \int_C \frac{z+1}{(z^2+1)^2} dz, \quad C : |z-i| = 1$$

【解答例】 (1) i は C の内部にあるので $f(z) = e^{\pi z}$ として $n = 2$ の場合のコーシーの微積分公式を用いる．$f''(z) = \pi^2 e^{\pi z}$ より

$$\int_C \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^3} = \frac{2\pi i}{2!} f''(i) = \pi^3 i e^{i\pi} = -i\pi^3$$

(2) 分母が 0 になる点は $\pm i$ だがこのうち C の内部にあるのは i のみである．そこで $f(z) = (z+1)/(z+i)^2$ として $n = 1$ の場合のコーシーの微積分公式を用いる．$f'(z) = (-z-2+i)/(z+i)^3$ より

$$\int_C \frac{z+1}{(z^2+1)^2} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz = 2\pi i f'(i) = \frac{\pi}{2}$$

【コメント】

- コーシーの微積分公式を利用する問題だが (2) は何が $f(z)$ なのかきちんと明示しなくてはならない．$(z^2+1) = (z+i)(z-i)$ という因数分解が行えないようでは話にならない．
- (1) で $e^{i\pi}$ のまま計算結果にしている人がいるが $e^{i\pi} = -1$ は使うべきだ．