「複素関数」第 1 回試験（12 月 1 日実施）解答例とコメント

各問 10 点（問 6 はそれぞれに 10 点）の 80 点満点で採点した．最高点は 67 点，最低点は 0 点，平均点は 30.44 点だった．かなり甘いとは思うが，合格点は 20 点にした．再試については別途 Moodle 上に掲載する（ホームページには掲載しない）．

1 枚目が留数定理に至る論理の流れを確認する問題だ．どれもきちんと理解しておいてほしいことだが，覚えてはいるが何故かまでは考えていないという人が多いのではないか．「何故か」を考えることをやめてしまったら，数学の学修は成立しない．結果の如何にかかわらず，解答例をきちんと読んでみてほしい．数学コースではこの授業の発展として 3 年次に複素解析の授業がある．その授業の受講には 1 枚目の問題をきちんと分かっておくことが必要だ．

留数定理による積分計算は楽しんでいただけただろうか．1 年次の積分計算とは全く異なる手法であり物理学など他分野でもよく使われる方法だ．計算問題については，自分でやってみることが必要不可欠だが，それを怠って試験を受けた人が目につく．残念である．

問 1 $|z-\alpha| < R$ で正則な複素関数 $f(z)$ は $z=\alpha$ の周りでテイラー展開 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ できることが知られている．またこのような級数について，項別微分（級数で表された関数の微分が各項の微分の級数に等しくなること）できることが知られている．このことを利用して $c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$ が成り立つことを示せ．またテイラー展開は一通りである理由を簡単に述べよ．

【解答例】 項別微分により両辺を k 回微分すれば

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left((z-\alpha)^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-\alpha)^{n-k}$$

である．両辺に α を代入すれば

$$f^{(k)}(\alpha) = k! c_k$$

であり，$c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$ を得る．c_k の値は $f^{(k)}(z)$ によって決まるのでテイラー展開は一通りである．

【コメント】

- $\sum$ 記号の使い方がでたらめな人が多い．解答例では $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}$ としているが，n はあらゆる 0 以上の整数を動くのであり特定の値ではない．この表記のまま $f(z)$ を n 回微分すると意味がつかなくなる．解答例のように k と文字を切り替える必要がある．この注意の意味が分からないという人は要注意だ．
- 微分するたびに最低次の項から消えていく．k 回微分した時の最低次の項は $c_k k!$ になっている．次の項からは $(z-\alpha)^{n-k}$ がかかるので $z=\alpha$ を代入したら 0 になる．このことをきちんと認識できている答案を正解にした．
- 一回項別微分しただけで結論を書いても，結論は問題文に明示されているので評価しようがない．
- テイラー展開の係数が $\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$ であることは 1 年次で学習した．しかしそれを使ったら解答にならない．問題はべき級数に展開できることと項別微分を使えという趣旨だ．
- テイラー展開の一意性についてはどう答えればいいか戸惑う人もいるだろう．ただし，きちんと理解できれば的確な解答が記述できるはずだ．答え方はいろいろあるが解答例を参考にしてほしい．
- 前半に 7 点，後半に 3 点配点した．平均点は 3.08 点だった．

問 2 $0 < |z-\alpha| < R$ で正則な複素関数 $f(z)$ は $z = \alpha$ の周りでローラン展開 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ できることが知られている．またこのような級数について，項別積分（級数で表された関数の積分が各項の積分の級数に等しくなること）できることが知られている．ジョルダン曲線 C を円周 $|z-\alpha| = r < R$ を正の向きに一回りする曲線とするとき $c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)(z-\alpha)^{-k-1}dz$ が成り立つことを示せ．また $f(z)$ の $z = \alpha$ における留数 $R(\alpha)$ の定義を述べるとともに $\int_C f(z)dz = 2\pi i R(\alpha)$ が成り立つことを示せ．

【解答例】$f(z)(z-\alpha)^{-k-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^{n-k-1}$ の両辺を C 上で積分すれば項別積分により

$$\int_C f(z)(z-\alpha)^{-k-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_C (z-\alpha)^{n-k-1}dz$$

が成り立つ．ここで $n-k-1 \neq -1$ のときは $(z-\alpha)^{n-k-1}$ は $z \neq \alpha$ で定義された原始関数 $\frac{1}{n-k}(z-\alpha)^{n-k}$ を持つ．線積分の値は原始関数の始点と終点での値の差になるが，C はジョルダン曲線（閉曲線）なので始点と終点は同じ点であり，積分の値は 0 になる．よって

$$\int_C f(z)(z-\alpha)^{-k-1}dz = c_k \int_C (z-\alpha)^{-1}dz = c_k[\log(z-\alpha)]_{\alpha+r}^{\alpha+re^{2\pi i}} = 2\pi i c_k$$

留数は $R(\alpha) = c_{-1}$ なので $k = -1$ として次を得る．

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i R(\alpha)$$

【コメント】

- 示すべき等式が $f(z)(z-\alpha)^{-k-1}$ の線積分なのだから，これを級数で表して項別積分すればよい．自然な発想のはずだ．$f(z)$ の線積分を考える人が多いのに驚かされる．何が問題なのかきちんと意識しているのだろうか．
- C 上の線積分は不定積分ではない．この講義で不定積分を使ったことは殆どないはずだ．$(z-\alpha)^n$ の線積分を $\frac{1}{n+1}(z-\alpha)^{n+1}$ としている答案が目につくが，そもそも何の授業を受けているのか理解していない．
- 整数 n について $(z-\alpha)^n$ を α を中心とする円周上で線積分することは，この講義の最も基本的な計算である．$z = \alpha + re^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とおいて

$$\int_C (z-\alpha)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} rie^{i\theta} d\theta = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}d\theta$$

  $n \neq -1$ のときは，$\sin(n+1)\theta$, $\cos(n+1)\theta$ の $[0, 2\pi]$ 上の積分なので 0，$n = -1$ のときは $2\pi i$ である．簡単なことだ．
- 平均は 1.29 点だった．

問 3 α が $f(z)$ の m 位の極であることの定義を述べよ．また α における留数が次で与えられることを示せ．

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{1}{(m-1)!}\{(z-\alpha)^m f(z)\}^{(m-1)}$$

【解答例】 ローラン展開が $-m$ 乗の項から始まるときすなわち

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k \qquad c_{-m} \neq 0$$

のとき，m 位の極という．両辺に $(z-\alpha)^m$ をかければ

$$(z-\alpha)^m f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_{h-m} (z-\alpha)^h$$

であり右辺はテイラー展開なので α は除去可能特異点である．左辺を $g(z)$ とおき $g(\alpha) = c_{-m}$ と定めればこれは正則関数であり，$f(z)$ の留数 c_{-1} は $g(z)$ のテイラー展開の $(z-\alpha)^{m-1}$ の係数になっているので

$$R(\alpha) = c_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \{(z-\alpha)^m f(z)\}^{(m-1)}$$

なお $f(\alpha)$ は定義されていないので，$f(z)$ による表示においては，$z \to \alpha$ での極限としている．

【コメント】

- 極の定義をきちんと覚えていない人が多い．定義は数学を学ぶときにまず確認しなくてはならない事項だ．
- 平均は 2.97 点だった．

問 4 $\sin z$ の零点はすべて 1 位の零点であることを示せ．また $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$ の極とその点における留数を求めよ．

【解答例】 $(\sin z)' = \cos z$ と $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ より $\sin z = (\sin z)' = 0$ を満たす点は存在しない．よってテイラー展開が 2 次の項から始まることはないので零点はすべて 1 位の零点である．

$\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$ より

$$\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{ix-y} = e^{-ix+y}$$

であり，絶対値が等しいことから $e^{-y} = e^{y}$ を得る．すなわち $y = 0$ である．$e^{ix} = e^{-ix}$ より $e^{2ix} = 1$ であり $2x = 2n\pi$ である．よって零点は $n\pi$ である．

分子の零点は 0 のみで 1 位の零点である．よって $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$ において 0 は極にならない（除去可能特異点）．$n \neq 0$ のとき $n\pi$ は $f(z)$ の 1 位の極である．留数は

$$R(n\pi) = \left[\frac{z}{\cos z}\right]_{z=n\pi} = (-1)^n n\pi$$

【コメント】

- $\sin z = 0$ の解は $z = n\pi$ だが，z が実数なら既知としてよいが z は複素数なので理由が必要だ．ただしこの点については減点しなかった．
- 1 位の零点であるとは，テイラー展開が 1 次の項から始まることだ．零点において微分（テイラー展開の 1 次の項の係数）が 0 にならないことを言えばよい．的確に理由が述べられた人は少なかった．

- 0 では分母分子ともに 1 位の零点なので，極にならない．このことに気づいた人は殆どいなかった．
- 平均は 1.98 点だった．

問 5 $\displaystyle\int_C \frac{2z^2+1}{(z-1)^2(z^2+4)}dz$ の値を $C : |z-1| = 1$ と $C : |z-1-i| = 2$ の 2 つの場合について求めよ．

【解答例】被積分関数は 2 位の極 1 と 1 位の極 $\pm 2i$ をもつ．$|z-1| = 1$ 内の極は 1 のみなので

$$\int_C \frac{2z^2+1}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = 2\pi i R(1) = 2\pi i\left[\left(\frac{2z^2+1}{z^2+4}\right)'\right]_{z=1} = 2\pi i\frac{14}{25} = \frac{28}{25}\pi i$$

$|z-1-i| = 2$ の内部には 1 の他 $2i$ が入る．

$$\int_C \frac{2z^2+1}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = 2\pi i(R(1)+R(2i)) = 2\pi i\left(\frac{14}{25}+\left[\frac{2z^2+1}{(z-1)^2}\frac{1}{2z}\right]_{z=2i}\right) = 2\pi i\left(\frac{14}{25}-\frac{28+21i}{100}\right) = \frac{21+28i}{50}\pi$$

【コメント】

- 複素数の計算の答えは実部と虚部がきちんと分かるような形で表すこと．分母に i の式が入っているときは，共役複素数を分母分子にかけて分母を実数にすること．
- C 内の極をきちんと考えること．$-2i$ は曲線の中に含まれていない．
- 極は円の中心だと思い込んでいる人がいる．$1+i$ は極ではない．
- 平均点は 3.74 点だった．

問 6 次の積分の値を求めよ．
(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}dx$

【解答例】分母が実軸で 0 にならないこと，分母の次数は分子の次数より 3 大きいことから留数定理が利用できる．$f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}$ の上半平面での極は i, $-2+i$ でありそれぞれ位数は 1 である．留数は

$$R(i) = \left[\frac{z}{2z(z^2+4z+5)}\right]_{z=i} = \frac{1}{2(4+4i)} = \frac{1-i}{16}$$

$$R(-2+i) = \left[\frac{z}{(z^2+1)(2z+4)}\right]_{z=-2+i} = \frac{-1+3i}{16}$$

よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}dx = 2\pi i(R(i)+R(-2+i)) = -\frac{\pi}{4}$$

【コメント】

- この計算は実軸上の区間 $[-R, R]$ を直径とする半円（上側）の周上の線積分を考えることにより正当化される．半円内の極は上半平面内の極に限られる．極 $-i, 2-i$ での留数は考えてはいけない．
- 実積分なので結果は実数である．複素数になってしまったらおかしいと感じてほしい．計算ミスでも結果が複素数になったものは多めに減点している．

問 6 次の積分の値を求めよ．
(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx$

【解答例】$f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+4)}$ について留数定理が利用できる．この関数の上半平面での極は i と $2i$ であり偶関数なので

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx = \frac{1}{2}2\pi i(R(i)+R(2i))$$

が成り立つ．i は 2 位の極なので

$$R(i) = \left[\left(\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+4)}\right)'\right]_{z=i} = -\frac{5}{36}i$$

$2i$ は 1 位の極なので

$$R(2i) = \left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2 2z}\right]_{z=2i} = \frac{1}{9}i$$

よって

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx = -\pi i\frac{1}{36}i = \frac{\pi}{36}$$

【コメント】

- i が 2 位の極なので留数の求め方は解答例の方法になる．簡単な分数式の微分だが，まじめにやると結構大変だ．私の感覚としては商の微分を使うよりも積の微分のみで攻めたほうが簡単に思える．

$$\left(\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+4)}\right)' = \frac{2z}{(z+i)^2(z^2+4)} - 2\frac{z^2}{(z+i)^3(z^2+4)} - \frac{2z^3}{(z+i)^2(z^2+4)^2}$$

  この形のまま i を代入すればよい．
- 平均点は 5.62 点だった．

問 6 次の積分の値を求めよ．
(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

【解答例】$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$ とおいて留数定理を使う．cos なので実部をとればよい．

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \mathrm{Re}\ (\pi i(R(i)+R(2i)))$$

極の i と $2i$ はいずれも 1 位の極であり

$$R(i) = \left[\frac{e^{iz}}{2z(z^2+4)}\right]_{z=i} = \frac{e^{-1}}{6i} \quad R(2i) = \left[\frac{e^{iz}}{(z^2+1)2z}\right]_{z=2i} = \frac{e^{-2}}{-12i}$$

よって

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \pi\left(\frac{e^{-1}}{6} - \frac{e^{-2}}{12}\right)$$

【コメント】

- 留数も計算しやすく比較的よくできていた．
- 分子を $\cos z$ として留数を求める人がいるが，これは間違いだ．留数定理が実の広義積分の計算に使えるためには，半径 R の上半円での線積分が $R \to \infty$ で 0 にいくことが必要だが $\cos z$ のままではその条件が出てこない．

$$|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = e^{-y}, \qquad |\cos z| = \left|\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right| \geqq \frac{|e^{-iz}| - |e^{iz}|}{2} = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

  だが上半平面では $y > 0$ なので $|e^{iz}| \leqq 1$ は成り立つ．しかし $|\cos z|$ は y を大きくしていくと無限大に発散してします．
- この問題では実部をとるまでもなく $\pi i(R(i) + R(2i))$ は実数になっている．

$$\frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)} + i\frac{\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

  だが第 2 項の $(-\infty, \infty)$ 上での積分は奇関数の積分なので 0 になってしまうからだ．結果的に実部をとることを意識しなくても正しい答えが出てしまった．
- 平均点は 5.95 点だった．