幾何概論 I および同演習の講義メモ (4 月 7 日)

今日の講義では，実数と論理で扱った事項のうち，この講義でも頻繁に使われる事項を解説した．今回の授業の事後学習として一つ一つの項目を講義メモに従って考察しておくこと．なお，テキスト（ホームページに掲載中）の番号を利用するのでテキストと比較しながら学習するように．

本日の講義の要点

1. 写像の像と逆像

写像の像と逆像の定義は 1.1.2 を確認すること．これについて講義では例 1.1 と命題 1.2 を解説した．また演習では　命題 1.3 の前半に取り組んでもらうとともに，その後半をレポート課題にした．

例 1.1　$x \in f^{-1}([a,b])$ は $f(x) = 0 \in [a,b]$ と書き直せるので真偽は x によらない．常に真（全体集合 $\mathbb{R}$）か，常に偽（空集合 $\emptyset$）である．

命題 1.2　要素 1 つのみの集合の逆像を考えている．f が全射ということは $\forall y \in Y$ について $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在することだが，これは $x \in f^{-1}(\{y\})$ ということに他ならない．ゆえに $\forall y$ について $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ である．逆に $\forall y$ について $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ ならば $x \in f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ をとることにより $f(x) = y$ となる．ゆえに全射である．

$f^{-1}(\{y\})$ が二つ以上の要素を持つときは，その要素を x_1, $x, 2$ と置くときに $f(x_1) = y = f(x_2)$ を得る．すなわち単射にならない．単射であれば $f^{-1}(\{y\})$ の要素の個数は 1 個または 0 個である．逆に f が単射でなかったとすると，異なる 2 点 $x_1 \neq x_2$ で $f(x_1) = f(x_2)$ となるものが存在する．$y = f(x_1)$ とおけば x_1, $x_2 \in f^{-1}(\{y\})$ であり $f^{-1}(\{y\})$ は 2 個以上の要素を含む．

全単射については上記二つの結果から導かれる．

命題 1.3　まず前半の結論は $f^{-1}(f(A)) \supset A$ である．テキストの包含関係の向きが逆になっているので訂正しておくこと．包含関係の証明なので $x \in A$ をとる．像の定義から $f(x) \in f(A)$ だが，逆像の定義により $x \in f^{-1}(f(A))$ となる．

後半はレポート課題にした．$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ の証明だが，両方の向きの包含関係を示すようにしてほしい．

2. 否定命題の作り方

全称記号，存在記号，「ならば」を使った命題の意味とその否定命題の作り方を解説した．数学の論理の理解に欠かせない内容なのでおぼろげに分かるのではなく当たり前のことと感じられるまで考えてほしい．講義では連続性の定義の主張の否定命題を記述した．

- $\neg(\forall \varepsilon > 0; (\exists \delta > 0; (|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)))$
  まずは連続の定義に否定記号 $\neg$ をつけた．これを $\neg(\forall \varepsilon > 0; (Q))$ とみると
- $\exists \varepsilon > 0; \neg(\exists \delta > 0; (|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon))$
  となる．$\neg$ 以下の部分を $\exists \delta > 0; (R)$ とみればこれは
- $\exists \varepsilon > 0; (\forall \delta > 0; \neg(|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon))$
  ここで「ならば」を使った命題の否定を考える．$|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ は $|x-a| < \delta$ を満たす任意の x について，$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つという意味なので，この否定は $|x-a| < \delta$ を満たす x の中に $|f(x) - f(a)| \geqq \varepsilon$ を満たすものがあるということになる．すなわち $|x-a| < \delta$ と $|f(x) - f(a)| \geqq \varepsilon$ の両方を満たす x が存在するということだ．すなわち
- $\exists \varepsilon > 0; (\forall \delta > 0; (\exists x; (|x-a| < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| \geqq \varepsilon))$

この最後の主張が $f(x)$ が $x = a$ で連続でないことの定義になる．この理解は距離空間の議論でもう一

度出会うことになる．じっくり考えておくこと．

演習では問題 1.6(2) をやってもらった．この主張は $f(x)$ が $x = a$ の周りで正であることを表している．レポート課題は問題 1.6(3) を出題した．命題の意味も含めて考えてほしい．

3. 集合の濃度

定義 1.1 を述べた後，命題 1.7(2) と $\sharp\mathbb{N} = \sharp\mathbb{Q} < \sharp\mathbb{R}$ という 2 つの結果のみ述べた．証明は実数と論理で扱ったはずなので確認しておいてほしい．ここでは命題 1.9 の証明および講義で触れなかった命題 1.8 の証明をまとめておく．

命題 1.8 の証明　X が可算無限集合なので $\mathbb{N}$ からの全単射が存在する．それを $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ とおき，$f(n) = x_n$ とおけば $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と表される．同様に $Y = \{y_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ と表す．$X \times Y = \{(x_n, y_m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ と表されるが，これらのすべての要素は

- $n + m$ が小さいものから順に並べる．
- $n + m$ が等しいもの同士は n が小さいものから順に並べる．

という 2 つの方針で 1 列に並べることができる．よって $X \times Y$ は可算無限集合である．

命題 1.9 の証明　写像 $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ をとり $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ と定める．ここで $f(a) = A \in \mathcal{P}(X)$ となる $a \in X$ が存在したとする．

- $a \in A$ とすれば $a \notin f(a) = A$ であり矛盾である．
- $a \notin A$ とすれば $a \in f(a) = A$ でありやはり矛盾である．

いずれにしても矛盾が生じるので $f(a) = A$ となる $a \in X$ は存在しない．よって $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ は全射ではない．結局 X から $\mathcal{P}(X)$ の全射は存在せず，$\sharp X < \sharp\mathcal{P}(X)$ となる．

命題 1.9 により，無限の濃度も無数の種類があることが分かる．なおこの項目は演習では扱わなかった．

4. 無限個の集合の合併，共通部分

無限個の集合の和集合（講義では合併といったが和という場合も多い）と共通部分の定義は全称記号と存在記号を使って記述できる．命題 1.10 の証明は基本的な否定命題の作り方を利用すれば簡単だ．これを含めて講義と演習で解説した証明を記述しておく．

命題 1.10 の第 1 式　$x \in (\bigcap_\lambda A_\lambda)^c$ とは $x \in \bigcap_\lambda A_\lambda$ の否定が成り立つことに他ならない．すなわち $\forall\lambda; x \in A_\lambda$ の否定が成り立つということなので $\exists\lambda; x \notin A_\lambda$ が成り立つ．これは $\exists\lambda; x \in A^c$ と書き直せるので $x \in \bigcup_\lambda (A_\lambda)^c$ となる．

命題 1.11 の第 1 式　$x \in B \cup (\bigcap A_\lambda)$ とする．$x \in B$ または $x \in \bigcap A_\lambda$ が成り立つ．$x \in B$ のときは任意の λ について $x \in B \subset B \cup A_\lambda$ なので $x \in \bigcap_\lambda (B \cup A_\lambda)$ である．$x \in \bigcap_\lambda A_\lambda$ のときは，任意の λ について $x \in A_\lambda \subset B \cup A_\lambda$ となるので $x \in \bigcap_\lambda (B \cup A_\lambda)$ である．以上から $B \cup (\bigcap_\lambda A_\lambda) \subset \bigcap_\lambda (B \cup A_\lambda)$ を得る．

逆に $x \in \bigcap_\lambda (B \cup A_\lambda)$ とする．任意の λ について $x \in B \cup A_\lambda$ が成り立つ．ここで $x \in B$ の場合はもちろん $x \in B \subset B \cup (\bigcap_\lambda A_\lambda)$ が成り立つ．$x \notin B$ の場合は $x \in B \cup A_\lambda$ より $x \in A_\lambda$ となるので $x \in \bigcap_\lambda A_\lambda \subset B \cup (\bigcap_\lambda A_\lambda)$ が成り立つ．いずれにしても $x \in B \cup (\bigcap_\lambda A_\lambda)$ であり $\bigcap_\lambda (B \cup A_\lambda) \subset B \cup (\bigcap_\lambda A_\lambda)$ が示された．

命題 1.12 の左下の等式　まず第 1 行目の B_μ は B_σ とすべきだ．訂正しておいてほしい．この等式の証明は逆像の定義と共通部分の定義を組み合わせるだけなので易しい．

$x \in f^{-1}(\bigcap_\sigma B_\sigma)$ とする．逆像の定義からこれは $f(x) \in \bigcap_\sigma B_\sigma$ と同値である．これを共通部分の定義を使って書き直せば $\forall\sigma; f(x) \in B_\sigma$ となる．さらに逆像の定義によって $\forall\sigma; x \in f^{-1}(B_\sigma)$ と書き直せる．これは共通部分の定義により $x \in \bigcap_\sigma f^{-1}(B_\sigma)$ に他ならない．

解説もせずレポート課題にもしなかった問題も沢山あるが，時間の許す範囲で証明に取り組んでみてほ

しい．

あらためて今日の講義で出題したレポート課題をまとめておく．提出締め切りは 4 月 10 日 (金)12 時まで，提出は私の部屋 (理学部 3 号館 D416) の前に提出箱を置いておくのでその中に入れてほしい．締め切りに間に合わなかった場合は部屋の入り口の郵便受けに入れておくこと．

本日のレポート課題

課題 1 命題 1.3 の後半 $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ を示せ．

課題 2 問題 1.6(3)

課題 3 命題 1.12 の左上の式 $f\left(\bigcap_\lambda A_\lambda\right) \subset_\lambda f(A_\lambda)$ を示せ．

課題 4 命題 1.11 の第 2 式 $B \cap \left(\bigcup_\lambda A_\lambda\right) = \bigcup_\lambda (B \cap A_\lambda)$ を示せ．

次回は距離空間の節に入る．2.1 節を眺めておいてほしい．