幾何概論 I のレポート課題（4 月 7 日）の解答例とコメント

前回のレポート課題

3 番目の課題は講義で命題 1.12 の左下の式を解説したときに，左上の式はレポート課題と述べたと思う．私の思い込みかもしれないが，講義メモにはレポート課題として明記している．これを解かずに提出した人が多かったが講義メモを読まずにレポート課題に取り組んだということだろうか．

もしそうだとしたら，この講義の進め方をまったく理解していない．レポート課題に取り組むのは講義メモを参考に授業内容を復習した後だ．講義内容を理解しないままレポート課題に取り組んだら課題を難しいと感じるのは当たり前だ．効果の少ない非効率な学習法だと思うのだが如何だろうか．

レポート課題に取り組むのは授業で何をやったのか，どういう点が強調されたのかじっくり考えた後だ．このことを意識して学習を進めてほしい．

課題 1 命題 1.3 の後半 $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ を示せ．

【解答例】$f(f^{-1}(B)) \subset B \cap f(X)$ について

$y \in f(f^{-1}(B))$ をとる[*1]．像の定義より $y = f(x)$, $x \in f^{-1}(B)$ を満たす x が存在する．逆像の定義により $y = f(x) \in B$ である．$f(x) \in f(X)$ と合わせて $y \in B \cap f(X)$ を得る．

逆向きの包含関係については $y \in B \cap f(X)$ をとる．$y \in f(X)$ より $y = f(x)$ を満たす要素 x が存在する．$f(x) = y \in B$ より $x \in f^{-1}(B)$ である．よって $y \in f(f^{-1}(B))$ が成り立つ．

【コメント】

- $y \in f(f^{-1}(B))$ とおいて議論を始めること．像の要素だから $f(x) \in f(f^{-1}(B))$ と議論を始めた場合，$x \in f^{-1}(B)$ である保障はない．像の定義は $y = f(x)$ となる $x \in f^{-1}(B)$ が存在することであり，$y = f(x)$ を満たす x が $x \in f^{-1}(B)$ を満たすということではない．
- 逆写像 f^{-1} が存在するわけではないので，$f^{-1}(y)$ は定義されていない．逆像は逆写像による像ではない．
- 写像 $f : X \longrightarrow Y$ によって $f(X) \subset Y$ が定まる．いっぽう $B \subset Y$ はそれとはまったく無関係に定まる．$B \subset f(Y)$ というような記述があるが，こんな式が議論の中で出てくることはあり得ない．おかしいと感じてほしい．
- 数学の論理は $\Longrightarrow$ で演繹的に進めるのが基本だ．しかし，$\Longleftrightarrow$ を無感覚に使う人が多すぎる．$\exists x \in f^{-1}(B); y = f(x) \Longleftrightarrow f(x) \in B$ とするのはおかしい．左は y についての命題であるのに右には y が現れていない．命題として同じわけがない．もちろん $x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$ なので $f(x) \in B$ と続けるのは正しい．もう少し論理の流れには神経質になってほしい．
- 「かつ」は論理記号で $\wedge$,「または」は論理記号で $\vee$ である．講義では使わなかったがレポートの解答では使っている（ように思える）ものがあった．しかし集合演算の $\cap\cup$ とは違うので記号をはっきり使い分けること．

課題 2 問題 1.6(3)

【解答例】すべての A の要素 x について $r > 0$ をうまくとることにより $|y - x| < r$ を満たすすべての y について $y \in A$ となるようにできる．

この否定命題は

$$\exists x \in A; (\forall r > 0; (\exists y; (|y - x| < r \text{ かつ } y \notin A)))$$

[*1] なにげなく要素をとることは多いが，集合が空集合ならとること自体ができない．ただし，包含関係を示す場合は空集合はあらゆる集合の部分集合なのでもちろん成り立っている．特に「空集合の場合」を記述しなくてもよい．

【コメント】

- 日本語で表現することはできるようだ．第 1 関門突破というところだろうか．
- 否定命題については「ならば」の部分で失敗している人が多い．講義でも言ったように $P(x) \Longrightarrow Q(x)$ とは「$P(x)$ が真となるすべての x について，$Q(x)$ が真となる」という意味だ．論理記号を使って書き直せば $\forall x, P(x); Q(x)$ ということになる．これを否定するには「 $P(x)$ が真だからと言って，$Q(x)$ が真とは限らない」と言えばよい．すなわち $P(x)$ が真となる x で $Q(x)$ が偽となるものが存在するということだ．論理記号を使って書けば $\exists x, P(x); \neg Q(x)$ となる．x について $P(x)$ と $\neg Q(x)$ が成り立つので $\exists x; P(x)$ かつ $Q(x)$ となる．重要なことなのでもう一度考えてほしい．

  この問題では $|y-x| < r \Longrightarrow y \in A$ の否定なので $\exists y; (|y-x| < r$ かつ $y \notin A)$ となる．単に $|y-x| < r$ かつ $y \notin A$ としたり，$\exists y; (|y-x| < r \Longrightarrow y \notin A)$ としたりするのは誤りだ．

課題 3 命題 1.12 の左上の式 $f\left(\bigcap_\lambda A_\lambda\right) \subset \bigcap_\lambda f(A_\lambda)$ を示せ．

【解答例】$y \in f\left(\bigcap_\lambda A_\lambda\right)$ をとる．$x \in \bigcap_\lambda A_\lambda$ で $y = f(x)$ となるものをとる．任意の λ について $x \in A_\lambda$ なので $y = f(x) \in f(A_\lambda)$ である．よって $y \in \bigcap_\lambda f(A_\lambda)$ が成り立つ．

【別解答例】 任意の $\mu \in \Lambda$ について $\bigcap_\lambda A_\lambda \subset A_\mu$ である．ゆえに $f\left(\bigcap_\lambda A_\lambda\right) \subset f(A_\mu)$ である．μ は任意なので $f\left(\bigcap_\lambda A_\lambda\right) \subset \bigcap_\mu f(A_\mu)$ が成り立つ．

【コメント】

- この問題は演習の時間には触れなかったので解答をした人が少なかった．講義メモを読んでからレポート課題に取り組んだ人はきちんと解答していたようだ．この問題を答えた人のほうが全体のできが良いように感じるのは私の錯覚だろうか．
- $y \in f\left(\bigcap_\lambda A_\lambda\right)$ を論理記号で記述すると $\exists x; (\forall \lambda; (A_\lambda x \in A_\lambda))$ かつ $y = f(x)$ となる．一方 $y \in \bigcap_\lambda f(A_\lambda)$ を論理記号で書くと $\forall \lambda; (\exists x; (x \in A_\lambda)$ かつ $y = f(x)$ となる．要するに $\forall \lambda$ と $\exists x$ が入れ替わっている．前者は x を λ によらずにとらなくてはいけないが，後者は λ ごとに変えてよい．結局前者のほうが後者より強い主張であり，前者が成り立てば後者も成り立つ．

課題 4 命題 1.11 の第 2 式 $B \cap \left(\bigcup_\lambda A_\lambda\right) = \bigcup_\lambda (B \cap A_\lambda)$ を示せ．

【解答例】$x \in B \cap \left(\bigcup_\lambda A_\lambda\right)$ をとる．$x \in \left(\bigcup_\lambda A_\lambda\right)$ より $x \in A_\lambda$ となる λ が存在する．$x \in B$ でもあるので $x \in B \cap A_\lambda$ が成り立つ．よって $x \in \bigcup_\lambda (B \cap A_\lambda)$ である．

逆に $x \in \bigcup_\lambda (B \cap A_\lambda)$ をとる．$x \in B \cap A_\lambda$ となる λ が存在する．$x \in A_\lambda$ より $x \in \bigcup_\lambda A_\lambda$ が成り立つ．$x \in B$ でもあるので $x \in B \cap \left(\bigcup_\lambda A_\lambda\right)$ が成り立つ．

【コメント】

- この証明は

$$
\begin{aligned}
x \in B \cap \left(\bigcup_\lambda A_\lambda\right) &\Longleftrightarrow x \in B \text{ かつ } x \in \bigcup A_\lambda \Longleftrightarrow x \in B \text{ かつ } (\exists \lambda; x \in A_\lambda) \\
&\Longleftrightarrow \exists \lambda; (x \in B \text{ かつ } x \in A_\lambda) \Longleftrightarrow x \in \bigcup (B \cap A_\lambda)
\end{aligned}
$$

  と済ませる場合も多いだろう．ポイントは $x \in B$ を $\exists \lambda$ の条件の中に繰り込むところだ．ただこれが明らかなことかというと疑問だ．証明すべき式が $B\cap$ を中に入れることで，上の議論で当たり前に使ったことと本質的には同等だ．やはり解答例のようにきちんと考えたほうが良いのではないか．