幾何概論 I および同演習の講義メモ (4 月 14 日)

今回の授業から距離空間の解説に入る．

本日の講義の要点

1. 距離の公理，距離空間

   従来から親しんできた距離について，距離の公理が成り立つことは明らかだ．ここではこの距離の公理から議論を始める．距離の具体的なイメージは平面の距離で構わない．ただし，議論はイメージではなく距離の公理に基づいて行わなくてはならない．それによって様々な集合に距離を定めることができる．

2. 距離空間の例

   例 2.1 について三角不等式以外の性質は簡単にチェックできる．三角不等式 $d(x,y)+d(y,z) \geqq d(x,z)$ については $x=z$ のときは右辺が 0 なので明らかだ．$x \neq z$ のときは右辺は 1 だが，$x \neq y$, $z \neq y$ の少なくとも一方は成り立つので左辺は 1 以上である．ゆえに三角不等式は成り立っている．

   例 2.2 と例 2.4 については線形空間のノルムの概念を使うと統一的に証明できる．（実または複素）線形空間 V において $\|\ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ がノルムであるとは

   - $\|\vec{x}\| \geqq 0, \quad \|\vec{0}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
   - $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$
   - $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$（三角不等式）

   が成り立つことを言う．ノルムが定められている線形空間をノルム空間という．ノルム空間において $d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|$ が距離になることは次のようにすればよい．

   - $d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| = \|(-1)(\vec{y}-\vec{x})\| = \|\vec{y}-\vec{x}\| = d(\vec{y},\vec{x})$
   - $d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| \geqq 0$
   - $d(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Longleftrightarrow \|\vec{x}-\vec{y}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{x}-\vec{y} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$
   - $d(\vec{x},\vec{y}) + d(\vec{y},\vec{x}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| + \|\vec{y}-\vec{z}\| \geqq \|\vec{x}-\vec{z}\| = d(\vec{x},\vec{z})$

   例 2.2 が距離の例であることを確認するには，$\mathbb{R}^n$ において

   $$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_j| \mid 1 \leqq j \leqq n\}$$

   のそれぞれがノルムであることを言えばよい．このうち $\|\boldsymbol{x}\|_2$ については $\mathbb{R}^n$ の標準内積に関するノルムなのですでに学習済みである．他の 2 つについて三角不等式以外は簡単なので省略する．三角不等式についても具体的に書き下してみればすぐに分かるはずだ．演習の時間に考えてもらい，解説も付けたがここでも記述しておこう．

   $$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \leqq \sum_{j=1}^{n} (|x_j| + |y_j|) = \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1$$

   $$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty = \max_{1 \leqq j \leqq n}\{|x_j + y_j|\} \leqq \max_{1 \leqq j \leqq n}(|x_j| + |y_j|) \leqq \max_{1 \leqq j \leqq n}\{|x_j|\} + \max_{1 \leqq j \leqq n}\{|y_j|\} = \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty$$

   例 2.4 も同様に $\|\ \|_2$ は内積由来のノルムであり，ノルムであることの証明は線形数学で紹介した．他のノルムについても三角不等式のみが問題になる．この証明についてはレポート問題にした．

3. 命題 2.3 と命題 2.5（d_1, d_2, d_∞ に関する不等式）

これらの不等式はノルムの段階で示したほうが簡単である．まず $\mathbb{R}^n$ のノルムについて $\max\{|x_j|\} = |x_{j_0}|$ となる番号を j_0 とおいて

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = |x_{j_0}| \leqq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j)^2} = \|\boldsymbol{x}\|_2, \quad \|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \leqq \sum_{j=1}^n |x_{j_0}| = n|x_{j_0}| = n\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$

$d_2 \leqq \sqrt{n} d_1$ を示すには，内積に関するコーシー・シュワルツの不等式を利用する．$\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{y} = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$, $\boldsymbol{z} = (1, 1, \ldots, 1)$ とおいて $|(\vec{y}, \vec{z})| \leqq \|\vec{y}\|_2 \|\vec{z}\|_2$ に代入すれば

$$\left|\sum_{j=1}^n |x_j|\right| \leqq \|\boldsymbol{y}\|_2 \|z\|_2$$

左辺は $\|\boldsymbol{x}\|_1$ に他ならず，$\|\boldsymbol{y}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$, $\|z\| = \sqrt{n}$ を使えば $\|\boldsymbol{x}\|_1 \leqq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_2$ を得る．

例 4 の連続関数の集合についてもノルムについての不等式が得られる．このことについてはレポート課題にした．

4. 部分距離空間，単射によって誘導される距離

距離空間 (X, d) と単射 $f : Y \longrightarrow X$ が与えられたとき

$$d_f(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2))$$

は X の距離になる．これを f により誘導された距離という．これが距離であることは，距離の公理を一つずつ確かめればよい．演習の時間に取り組んでもらったが簡単な問題だ．

- $d_f(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) = d(f(y_2), f(y_1)) = d_f(y_2, y_1)$
- $d_f(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(f_2)) \geqq 0$
- $d_f(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) = 0 \Longrightarrow f(y_1) = f(y_2)$ だが f が単射なので $y_1 = y_2$
- $d_f(y_1.y_2) + d_f(y_2, y_3) = d(f(y_1), f(y_2)) + d(f(y_2), f(y_3)) \geqq d(f(y_1), f(y_3)) = d_f(y_1, y_3)$

0 になるときが $y_1 = y_2$ の時に限ることの証明に単射性を使っている．それ以外は単射でなくても成り立つ．

部分距離空間は包含写像 $i : A \longrightarrow X$ に関し X から誘導された距離のことである．包含写像は単射である．講義ではユークリッド空間内の単位球面を部分空間とみた時の距離についてコメントした．2 点の距離は 2 点を結ぶ線分の長さなので，北極と南極の距離は 2 になる．これは球面に沿った道の長さの最小値としての距離とは異なる．

5. 直積空間

2 つの距離空間 $(X.d_X)$ と $(Y.d_Y)$ について，その直積集合に

$$d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

として距離を定めたものを直積距離空間という．これが距離になることは三角不等式以外は簡単である．三角不等式は次のように示す．

まず式が長くなることを避けるため $d_X(x_1, x_2) = a$, $d_X(x_2, x_3) = b$, $d_Y(y_1, y_2) = c$, $d_Y(y_2, y_3) = d$ とおく．2 項列ベクトル ${}^t(a, c)$ と ${}^t(b, d)$ についての三角不等式は

$$\sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2} \leqq \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2} = d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_{X\times Y}((x_2, y_2), (x_3, y_3))$$

である．d_X に関する三角不等式により $a+b \geqq d_X(x_1, x_3)$, d_Y に関する三角不等式により $c+d \geqq d_Y(y_1, y_3)$ なので

$$左辺 \geqq \sqrt{d_X(x_1, x_3)^2 + d_Y(y_1, y_3)^2} = d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_3, y_3))$$

であり $d_{X\times Y}$ に関する三角不等式が得られる．

6. 点列の収束と極限の一意性

点列の収束の定義はテキストを確認すること．距離空間の一般論は抽象的で分かりづらいかもしれないが，$\varepsilon\delta$ で記述してみると実数と論理で学習した極限の定義と何ら変わるところはない．イメージで考えるのではなく，論理で考える手法の強力さを感じてほしい．この定義に基づき極限の一意性（命題 2.4）が示せる．ここに証明を記述しておく．

点列 $\{a_n\}$ が 2 つの異なる点 b_1, b_2 に収束したとする．$b_1 \neq b_2$ より $\varepsilon = d(b_1, b_2)/2 > 0$ とおく．$a_n \to b_1$ の極限の定義から N_1 を

$$n \geqq N_1 \Longrightarrow d(a_n, b_1) < \varepsilon$$

となるようにとる．同様に $a_n \to b_2$ の極限の定義から

$$n \geqq N_2 \Longrightarrow d(a_n, b_2) < \varepsilon$$

となるようにとる．すると $n \geqq \max\{N_1, N_2\}$ について

$$2\varepsilon = d(b_1, b_2) \leqq d(b_1, a_n) + d(a_n, b_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となるので矛盾が生じる．よって 2 つの異なる点に収束することはあり得ない．

7. 距離の同値性

定義 2.4 の式は $Kd_1 \leqq d_2 \leqq Hd_1$ に訂正しておいてほしい．ここで導入された距離の同値が実際同値関係であることは演習の時間に解説した．

- 反射律については $K = H = 1$ として $Kd \leqq d \leqq Hd$ が成り立つので成立する．
- 対称律については仮定 $d_1 \sim d_2$ より正数 K, H を $Kd_2 \leqq d_1 \leqq Hd_2$ となるようにとる．$(1/H)d_1 \leqq d_2 \leqq (1/K)d_1$ となるので $d_2 \sim d_1$ となる．
- 推移律については仮定 $d_1 \sim d_2$, $d_2 \sim d_3$ より正数 K, H, K', H' を $Kd_2 \leqq d_1 \leqq Hd_2$, $K'd_3 \leqq d_2 \leqq H'd_3$ が成り立つようにとる．$d_1 \leqq Hd_2 \leqq HH'd_3$ と $d_1 \geqq Kd_2 \geqq KK'd_3$ より $KK'd_3 \leqq d_1 \leqq HH'd_3$ となるので $d_1 \sim d_3$ である．

同値な距離に関して収束の概念が同じになることまで話をしたかったが時間が足りず同値の定義で終わってしまった．これについては次回扱うことにする．次回は点列の収束性の続きと写像の連続性，一様連続性について解説する．実数と論理で学習した連続性や一様連続性について復習しておくように．

さて，今日の講義で出題したレポート課題をまとめておく．提出締め切りは 4 月 16 日 (木)16 時半まで，提出は私の部屋 (理学部 3 号館 D416）の前に提出箱を置いておくのでその中に入れてほしい．レポート提出箱は 4 月 20 日の朝まで置いておくので，締め切りに間に合わなかった人がその中に入れておいて構わない．

本日のレポート課題

課題 1 $[0, 1]$ 区間上の連続関数全体の集合 V について

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}, \quad \|f\|_\infty = \max_{0\leqq x\leqq 1} |f(x)|$$

のそれぞれについて三角不等式が成り立つことを示せ．すなわち次が成り立つことを示せ．

$$\|f+g\|_1 \leqq \|f\|_1 + \|g\|_1, \qquad \|f+g\|_\infty \leqq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

（$\|f\|_2$ に関する三角不等式については内積由来のノルムなので線形数学で紹介済み）

課題 2 上のノルムについて $\|f\|_1 \leqq \|f\|_2 \leqq \|f\|_\infty$ を示せ．

【ヒント】 $|f(x)|$ の最大値を $|f(c)| = M$ とおいて考えると良い．なお，$d_1 \leqq d_2$ についてはコーシー・シュワルツの不等式 $|(g,h)| \leqq \|g\|_2\|h\|_2$ を利用する． $g = |f|$, $h = 1$ として考えてみよ．

課題 3 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ で定義された次の関数が $\mathbb{R}$ の距離になるか否か考察せよ．

$$(1)\ d(x,y) = |x^3 - y^3| \qquad (2)\ d(x,y) = |x^4 - y^4|$$

次回は距離空間の節に入る．2.1 節を眺めておいてほしい．